

線形代数

第7回「行列式(1)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

- 与えられた行列が正則であるか否かを判断する指標として行列式がある.
 - 行列式の定義に必要な置換について説明する.
1. 行列式(2,3次の場合, サラスの方法)
 2. 置換(合成, 逆置換, 巡回置換, 互換, 符号)

連立一次方程式

- n 変数の n 個の方程式からなる連立一次方程式は n 次正方行列 A と n 次元ベクトル x , n 次元ベクトル b を用いて

$$A x = b$$

の形に書くことができる. (A は係数行列, x は変数ベクトル, b は定数項ベクトル)

- 連立一次方程式 $A x = b$ に解が一意的に存在するための必要十分条件は, A が正則行列であることである.
- このとき, 解は

$$x = A^{-1} b$$

- A が正則行列であるための必要十分条件は, $\text{rank } A = n$ である.
- より簡明な判定方法はあるのか?

二元連立一次方程式

- 2 変数 x, y に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a x + b y = u \\ c x + d y = v \end{cases}$$

を考える.

- 第1式を d 倍し, 第2式を b 倍することで,

$$\begin{cases} ad x + bd y = du \\ bc x + bd y = bv \end{cases}$$

- 2式の差を取ることで

$$(ad - bc)x = du - bv$$

- $ad - bc \neq 0$ であれば, 解が一意的に定まる.

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc} \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

- $ad - bc$ は係数行列の重要な量だと考えられる.

行列式

定義7.1

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式を

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定義する.

- 行列式の意味は「符号付体積拡大率」であるが, これに関しては次回解説する.

行列式(例)

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ に関して

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- 行列 $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ に関して

$$|B| = \cos \theta \cdot \cos \theta - (-\sin \theta) \cdot \sin \theta = 1$$

二元連立一次方程式の解の公式

定理7.2

- 2 変数 x, y に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a x + b y = u \\ c x + d y = v \end{cases}$$

は, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ の時に, 次のように解が一意的に定まる.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

- 先ほど求めた次の解の式を行列式を使って書き直したものである.

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc} \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

行列式

定義7.3

- 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ の行列式を

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

で定義する.

サラスの方法

定理7.4

- 2次と3次の正方行列については, 左上から右下へ向かい方向に + の符号をつけて積を取り, 右上から左下へ向かう方向に - の符号をつけて積を取り, それらの和を取ることで行列式が求められる.
- これをサラスの方法という.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- より一般に, 高次の正方行列 A に対しても行列式 $|A|$ が定義されるが, サラスの方法のような表示は知られていない.

行列式(記法)

- 文献によっては, 正方行列 A の行列式を

$$\det A \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

などと書く場合がある.

- この講義でも, 後者の記法はしばしば登場する.

行列式(問題)

問題7.5

- 次の行列の行列式を計算せよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

置換

- 一般の正方行列 A の行列式 $|A|$ を定義するために、置換の概念を導入する.
- n 個の文字からなる集合 $L = \{1, 2, \dots, n\}$ を考える.

定義7.6

- L から自分自身への全単射の写像を n 文字の置換という.
- n 文字の置換 $\sigma: L \rightarrow L$ が

$$1 \mapsto k_1, 2 \mapsto k_2, \dots, n \mapsto k_n$$

という写像のときに

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と表す.

- つまり, 下の数字は上の数字の行先を示す.

置換(例)

例7.7

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に関して

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2$$

- この表記は, 上下の組み合わせが変わらない限り順序は変えて良い.
- また, 動かさない文字は省略しても良い.

例7.8

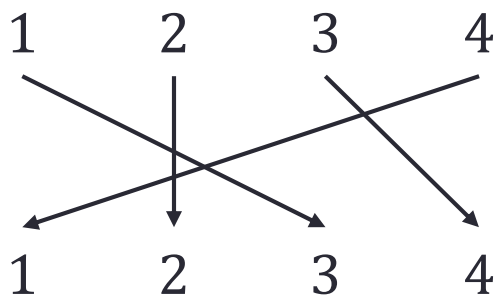
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- 省略する場合には, 何文字の置換なのか明らかにする必要がある.

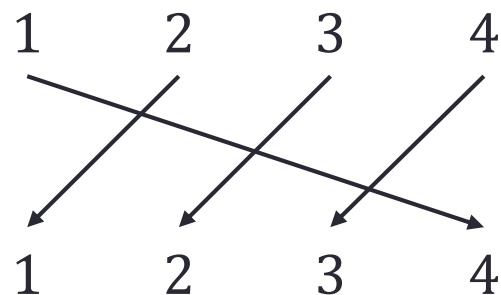
置換(図示)

- 置換は図示すると理解しやすい.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



置換の積

- 置換は L から自分自身への写像であるので、写像の合成を考えることができる.

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{\tau} & L & \xrightarrow{\sigma} & L \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \sigma \circ \tau & &
 \end{array}$$

定義7.9

- 置換 σ と τ の積 $\sigma\tau$ を $\sigma \circ \tau$ で定義する.

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- 写像の合成は結合律 $(f \circ (g \circ h)) = (f \circ g) \circ h$ を満たすため、置換の積も結合法則を満たす.

$$\sigma(\tau v) = (\sigma\tau)v$$

そのため、3つ以上の置換の積を書くときに括弧を省略することができる.

- ただし、交換法則 $(\sigma\tau = \tau\sigma)$ は一般には成り立たないので積の順番を変えてはいけない.

置換の積(例)

例7.10

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の積を求める.

$$\sigma \tau(1) = \sigma(2) = 3$$

$$\sigma \tau(2) = \sigma(3) = 1$$

$$\sigma \tau(3) = \sigma(4) = 2$$

$$\sigma \tau(4) = \sigma(1) = 4$$

であるから

$$\sigma \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

単位置換と逆置換

定義7.11

- すべての文字を動かさない置換を e と書き, **単位置換**という.
- 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を σ の**逆置換**という.

- このとき

$$\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = e$$

が成り立つ.

逆置換(例)

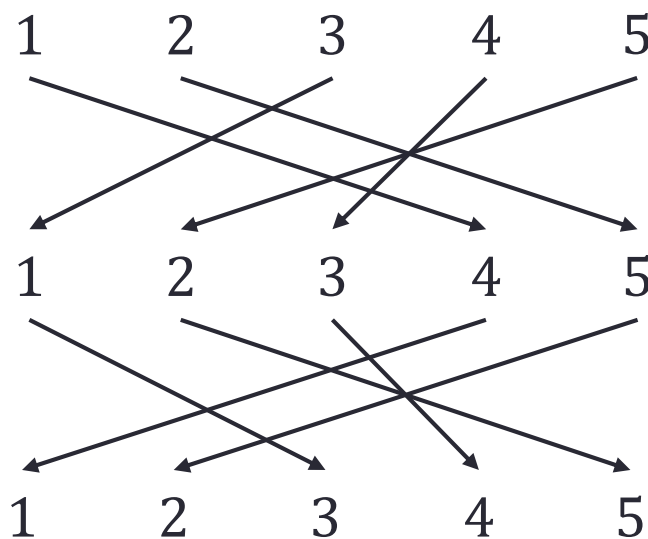
例7.12

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の逆置換は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



対称群(置換群)

定理7.13

- n 文字の置換は次の性質を満たす.
 1. $\sigma(\tau v) = (\sigma \tau) v$ (結合法則)
 2. e を単位置換としたとき, $\sigma e = e \sigma = \sigma$ (単位元の存在)
 3. $\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = e$ (逆元の存在)
- ある集合上の演算が上記の3つの性質を持つとき, その集合は群と呼ばれる.

定義7.14

- n 文字の置換全体を S_n と書き, n 次対称群(置換群)と呼ばれる.
- n 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ は $k_1, k_2, \dots, k_n$ が定まれば一意的に決まるため, S_n の元の個数は n 個の順列の個数に等しく, $n!$ である.

対称群(置換群)

例7.15

- 2文字の置換全体は

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- 3文字の置換全体は

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

- 一般に n 文字の置換全体 S_n は $n!$ 個の置換からなる.

巡回置換

定義7.16

- 集合 $L = \{1, 2, \dots, n\}$ のうち $k_1, k_2, \dots, k_r$ 以外は動かさないで, $k_1, k_2, \dots, k_r$ のみを

$$k_1 \mapsto k_2, k_2 \mapsto k_3, \dots, k_r \mapsto k_1$$

と順にずらす置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$$

を巡回置換といい

$$\sigma = (k_1 k_2 \cdots k_r)$$

と書く.

巡回置換(例)

例7.17

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ は

$$\sigma: 2 \mapsto 5, 5 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$$

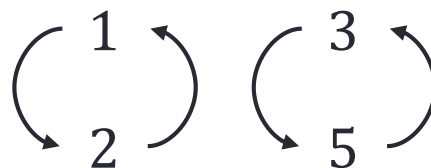
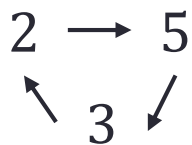
であって、他の文字は動かさないので

$$\sigma = (2\ 5\ 3)$$

- この巡回置換 σ は次のように書くこともできる.

$$\sigma = (5\ 3\ 2) = (3\ 2\ 5)$$

- 一方で, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ は巡回置換ではない.



巡回置換の積

定理7.18

- 任意の置換は巡回置換の積で表される.

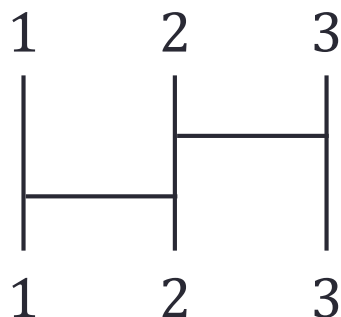
- 例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ について考える.
- まず何か1つの文字, 例えば 1 を取り, それがどう移っているかを調べる.
 $1 \mapsto 4, 4 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$
- したがって, σ と巡回置換 $(1\ 4\ 2)$ は, 1, 2, 4 に関して同じ変換を引き起こす.
- 次に, 1, 2, 4 以外の文字, 例えば 3 を取り, それがどう移っていくかを調べる.
 $3 \mapsto 6, 6 \mapsto 5, 5 \mapsto 7, 7 \mapsto 3$
- したがって, σ と巡回置換 $(3\ 6\ 5\ 7)$ は, 3, 5, 6, 7 に関して同じ変換を引き起こす.
- σ が動かす文字に関しては全て調べたから,

$$\sigma = (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 5\ 7) = (3\ 6\ 5\ 7)(1\ 4\ 2)$$

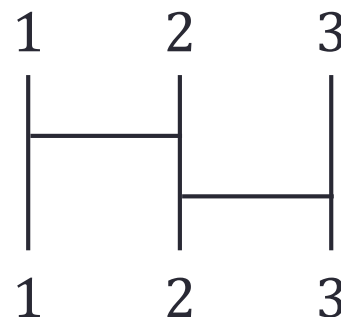
互換

定義7.19

- 巡回置換の内, 特に2文字の巡回置換 $(i\ j)$ を **互換** という.
- つまり, 互換とは2文字 i と j を入れ替え他の文字は動かさない置換のことである.
- あみだくじは互換の積の良い例になっている.



$(1\ 2)(2\ 3)$



$(2\ 3)(1\ 2)$

- 上のあみだくじでは $(1\ 3)$ は現れない.
- また $(1\ 2)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2)$ であることにも注意.

互換の積

定理7.20

- 任意の置換は互換の積で表される.
- 定理7.13より, 任意の置換は巡回置換の積で表される.
- 巡回置換は次のように互換の積で表すことができる.

$$(k_1 k_2 \cdots k_r) = (k_1 k_r) \cdots (k_1 k_3)(k_1 k_2)$$

- したがって, 任意の置換は互換の積で表すことできる.
- 例えば,

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$$

互換の積

例7.21

- $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$ が成り立っていることを確認する.

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(1) = (1\ 4)(1\ 3)(2) = (1\ 4)(2) = 2$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(2) = (1\ 4)(1\ 3)(1) = (1\ 4)(3) = 3$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(3) = (1\ 4)(1\ 3)(3) = (1\ 4)(1) = 4$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(4) = (1\ 4)(1\ 3)(4) = (1\ 4)(4) = 1$$

偶置換と奇置換

定義7.22

- 置換 σ が m 個の互換の積で表せるとき

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

を σ の符号という.

- $\text{sgn}(\sigma) = 1$ となる置換 σ を偶置換という.
- $\text{sgn}(\sigma) = -1$ となる置換 σ を奇置換という.

- 置換 σ の互換の積としての表示は一意的ではない.

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4) &= (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) \\ &= (1\ 3)(1\ 4)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 3)\end{aligned}$$

- しかし, 置換の符号は互換の積としての表示に依存しない.
- 単位置換 e に関しては, $\text{sgn}(e) = \text{sgn}((1\ 2)(2\ 1)) = 1$

置換による多項式の変換

定義7.23

- n 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と置換 $\sigma \in S_n$ が与えられたとき, 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えた多項式を σP で表す.

- $\sigma P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ である.

- $\sigma, \tau \in S_n$ に対して, $\tau(\sigma P) = (\tau\sigma)P$ である.

- $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2^3 - 2x_2^2x_3$ のとき

$$(1\ 2) P(x_1, x_2, x_3) = P(x_2, x_1, x_3) = x_2^2 + x_2x_1^3 - 2x_1^2x_3$$

$$(1\ 2\ 3) P(x_1, x_2, x_3) = P(x_2, x_3, x_1) = x_2^2 + x_2x_3^3 - 2x_3^2x_1$$

差積

定義7.24

- n 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式 $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ &\quad \times (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \\ &\quad \cdots \\ &\quad \times (x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

- 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ のうちの異なる2つの差 $x_i - x_j$ ($i < j$) 全体の積である.
- $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の変数を省略して単に Δ と書くことも多い.

差積の互換による変換

定理7.25

- 互換 $\sigma \in S_n$ に対して, $\sigma \Delta = -\Delta$
- 互換 $\sigma = (i j)$ ($i < j$)としたとき, 差積 Δ によって変化するものは x_i あるいは x_j の現れるもので, 以下の種類が考えられる.
 1. $(x_1 - x_i), (x_2 - x_i), \dots, (x_{i-1} - x_i)$ と $(x_1 - x_j), (x_2 - x_j), \dots, (x_{i-1} - x_j)$ が入れ替わるが符号は変わらない.
 2. $(x_i - x_{i+1}), (x_i - x_{i+2}), \dots, (x_i - x_{j-1})$ と $(x_{i+1} - x_j), (x_{i+2} - x_j), \dots, (x_{j-1} - x_j)$ が入れ替わりともに符号が反転するが, 両者を合わせると打ち消しあう.
 3. $(x_i - x_{j+1}), (x_i - x_{j+2}), \dots, (x_i - x_n)$ と $(x_j - x_{j+1}), (x_j - x_{j+2}), \dots, (x_j - x_n)$ が入れ替わるが符号は変わらない.
 4. 最後 $(x_i - y_j)$ については符号が入れ替わる.
- 全体としては, 符号が入れ替わることになり, $\sigma \Delta = -\Delta$ となる. (QED)

置換の符号の無矛盾性

定理7.26

- 置換 $\sigma \in S_n$ を互換の積として表すとき, その互換の個数が奇数個であるか偶数個であるかは, 与えられた置換によって定まる.
- $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$ と2通りの互換の積によってあらわされたとする. ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ は互換)
- 定理7.23により, $\sigma \Delta = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r \Delta = (-1)^r \Delta$
- 同じく, $\sigma \Delta = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s \Delta = (-1)^s \Delta$
- したがって, $(-1)^r \Delta = (-1)^s \Delta$
- ゆえに, $(-1)^r = (-1)^s$
- r と s の奇遇は一致する. (QED)
- この定理により, 置換 $\sigma \in S_n$ の符号を σ を互換で表した時の互換の個数を m とするときに, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ と定義しても問題ないことが保証される.

符号

定理7.27

- $\text{sgn}(\sigma \tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$
- $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$

- 置換 σ が k 個の互換の積, 置換 τ が l 個の互換の積で表される場合, $\sigma \tau$ は $k + l$ 個の互換の積で表すことができるため

$$\text{sgn}(\sigma \tau) = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau)$$

が成り立つ.

- これを, $\sigma \sigma^{-1} = e$ に適用すると,

$$\text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma \sigma^{-1}) = \text{sgn}(e) = 1$$

- $\text{sgn}(\sigma) = \pm 1$ であることから

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

符号(例)

例7.28

- 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ の符号を求めよう.
- まず, 巡回置換の積に分解する.

$$1 \mapsto 7 \mapsto 9 \mapsto 5 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 8 \mapsto 3$$

であるから

$$\sigma = (1\ 7\ 9\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 8)$$

- 各巡回置換を互換の積に分解して

$$\sigma = (1\ 5)(1\ 9)(1\ 7)(2\ 4)(2\ 6)(3\ 8)$$

- したがって

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

対称群(置換群)(再訪)

例7.29

- 2文字の置換全体は

$$S_2 = \{ \overset{\text{偶置換}}{e} \} \cup \{ \overset{\text{奇置換}}{(1\ 2)} \}$$

- 3文字の置換全体は

$$S_3 = \{ \overset{\text{偶置換}}{e}, \overset{\text{偶置換}}{(1\ 2\ 3)}, \overset{\text{偶置換}}{(1\ 3\ 2)} \} \cup \{ \overset{\text{奇置換}}{(1\ 2)}, \overset{\text{奇置換}}{(2\ 3)}, \overset{\text{奇置換}}{(1\ 3)} \}$$

- 4文字の置換全体は

$$S_4 = \left\{ \overset{\text{偶置換}}{e}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)} \right\} \cup \left\{ \overset{\text{奇置換}}{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)} \right\}$$

- n 文字の置換全体 S_n は偶置換と奇置換に半々に分けられる.

まとめ

- 行列式
 - 2, 3次の場合
 - サラスの方法
- 置換
 - 合成
 - 逆置換
 - 巡回置換
 - 互換
 - 符号