線形代数
第8回「行列式(2)」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 行列式
2. 符号付き体積, 拡大率
3. 行列式の基本性質

行列式の定義

定義8.1

- n 次正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ の行列式 $|A|$ を次のように定義する.

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\,\cdots a_{n\sigma(n)}$$

- 記法 $\sum_{\sigma\in S_n}$ は，全ての n 次置換に関して和を取ることを意味する.

例8.2

- $S_2=\{\,e,(1\ 2)\,\}$ であり，$\operatorname{sgn}(e)=1$, $\operatorname{sgn}\big((1\ 2)\big)=-1$ なので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\operatorname{sgn}(e)\ a_{11}\,a_{22}+\operatorname{sgn}\big((1\ 2)\big)\ a_{12}\,a_{21}$$

$$=a_{11}\,a_{22}-\ a_{12}\,a_{21}$$

行列式(3次正方行列)

例8.3

- $S_3 = \{\, e, (1\ 2), (2\ 3), (3\ 1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \,\}$ であり,

$$\mathrm{sgn}(e) = \mathrm{sgn}\big((1\ 2\ 3)\big) = \mathrm{sgn}\big((1\ 3\ 2)\big) = 1$$

$$\mathrm{sgn}\big((1\ 2)\big) = \mathrm{sgn}\big((2\ 3)\big) = \mathrm{sgn}\big((3\ 1)\big) = -1$$

であるから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

$$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

行列式(4次正方行列)

例8.4

- 4 次正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ に関して,

$$
\begin{aligned}
|A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\
& + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\
& + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
& + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\
& + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\
& + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}
\end{aligned}
$$

幾何学的意味

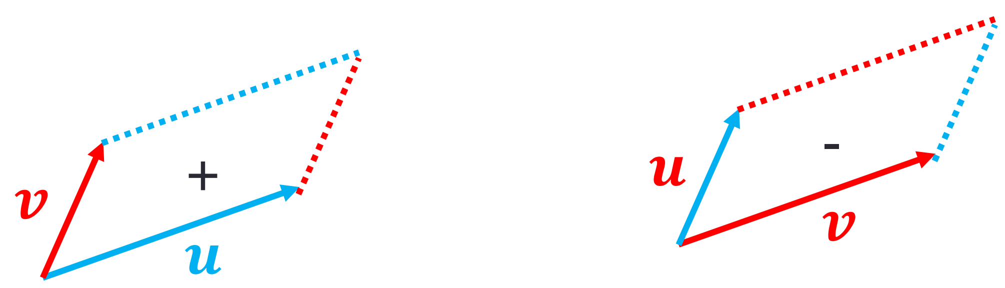
- n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ は，A が定める線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の体積拡大率という幾何学的解釈が可能である．
- 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は，線形写像

$$f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

という平面 $\mathbb{R}^2$ 上の変換を定める．

- 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ に対して，これらが張る平行四辺形の「向きを込めた」面積は次のように計算される．

$$\mathrm{Area}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$



符号付き面積拡大率

定理8.5

- 2 次正方行列 A に関して

$$\mathrm{Area}(A\,\boldsymbol{u}, A\,\boldsymbol{v}) = |A| \times \mathrm{Area}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つ.

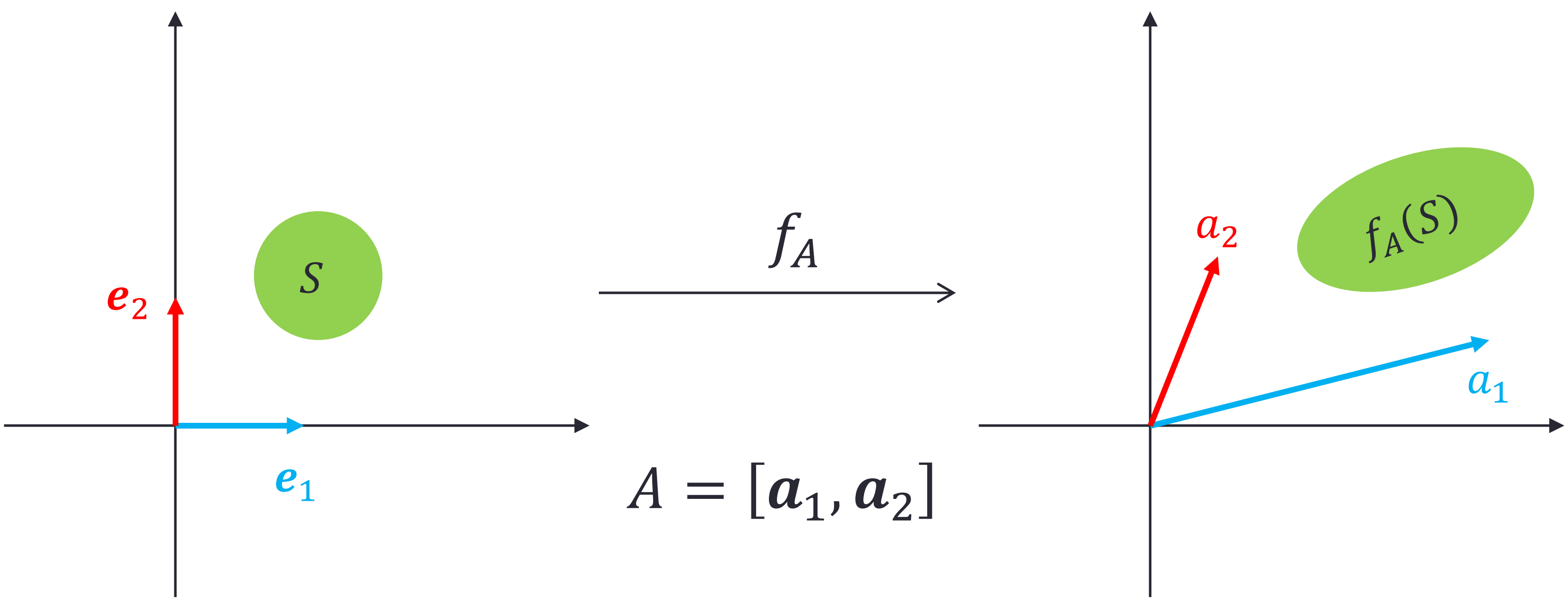
- より一般に，任意の図形 $S \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{Area}\big(f_A(S)\big) = |A| \times \mathrm{Area}(S)$$

が成り立つ. ここで，$f_A(S) = \{\, f_A(v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in S \,\}$ である.

符号付き面積拡大率

- 線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ によって平面 $\mathbb{R}^2$ 内の図形の面積が $|A|$ 倍される.
- $|A|$ は「符号付きの面積拡大率」であり, $|A| \geq 0$ とは限らないことに注意.



符号付き面積拡大率（確認）

- 簡単な例で確かめよう. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_2$ とすると

$$A\,\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ \ A\,\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$$

であった. ここで $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は A の第1,2列ベクトルである（$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$）.

- まず

$$\mathrm{Area}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

これは e_1, e_2 が単位正方形を張ることからも分かる.

- 一方で

$$\mathrm{Area}(A\,\boldsymbol{e}_1, A\,\boldsymbol{e}_2) = \mathrm{Area}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = ad - bc = |A|$$

であるから

$$\mathrm{Area}(A\,\boldsymbol{e}_1, A\,\boldsymbol{e}_2) = |A| \times \mathrm{Area}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

2次正方行列の行列式の性質

- 以上の考察により，2次正方行列について以下のことが分かる.

定理8.6

1. $|A\,B| = |A||B|$（行列式の乗法性）
2. $|A| > 0$ であるとき線形写像 f_A は図形の向きを保つ
3. $|A| < 0$ であるとき線形写像 f_A は図形の向きを反転させる
4. A が正則であれば，$|A^{-1}| = |A|^{-1}$（特に $|A| \neq 0$）

- 2次正方行列 A に関して，$|A| \neq 0$ であれば，A は正則であった.
- 逆に，A が正則であれば，行列式の乗法性から

$$1 = |E| = |A\,A^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

であるから，$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ であり，特に $|A| \neq 0$ である.

- 直感的には，A の定める線形写像 f_A の像が潰れる場合には，全ての図形の面積が 0 になることから $|A| = 0$ となる.

符号付き面積拡大率（例）

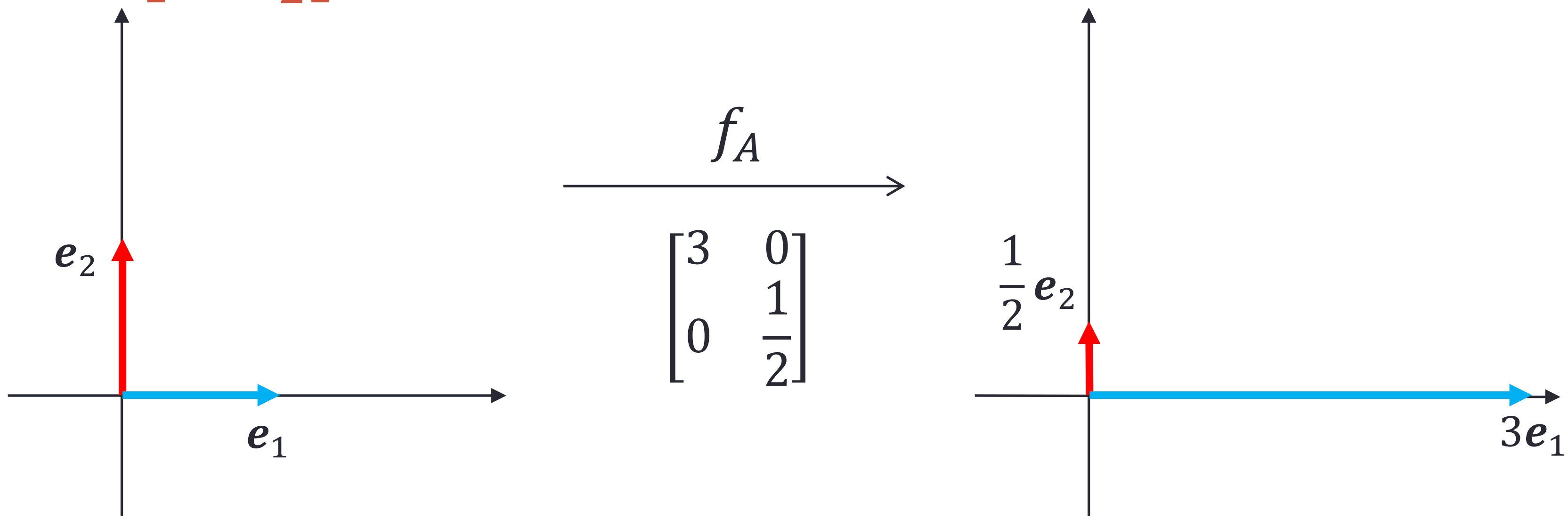
例8.7

- 次の行列の行列式を計算し，符号付き面積拡大率として理解できることを確認せよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

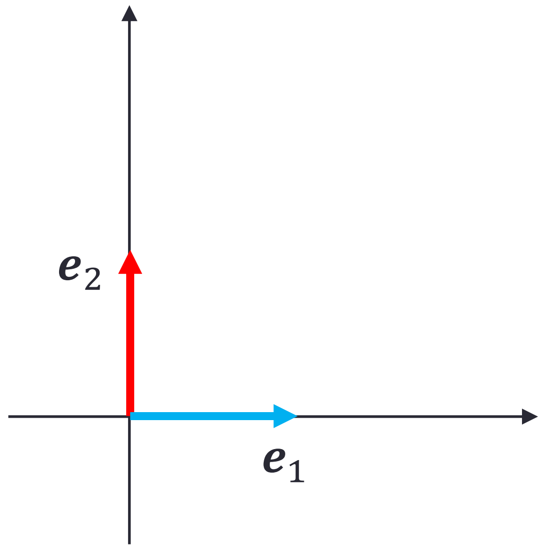
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

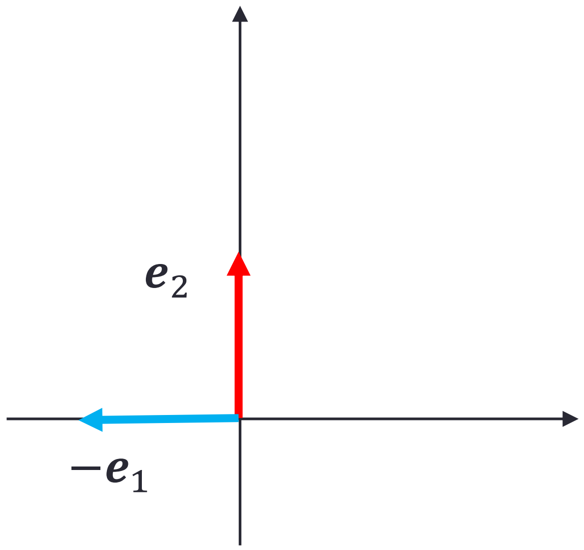


$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



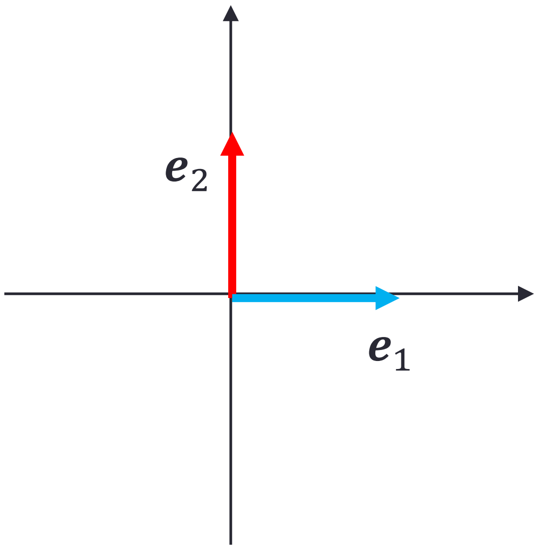
$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]{f_B}$$



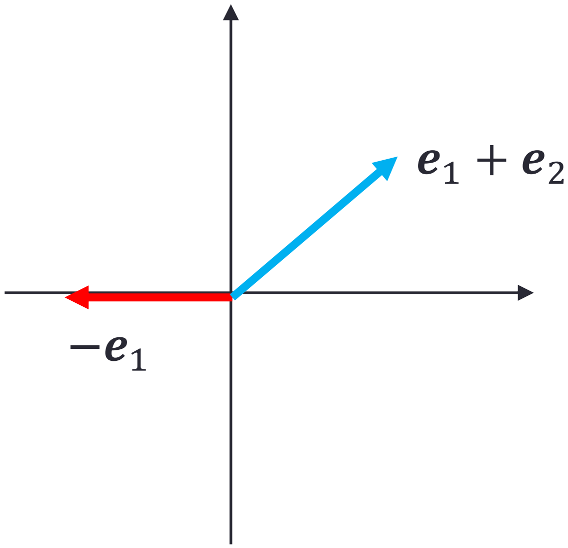
$$B^2 = E_2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

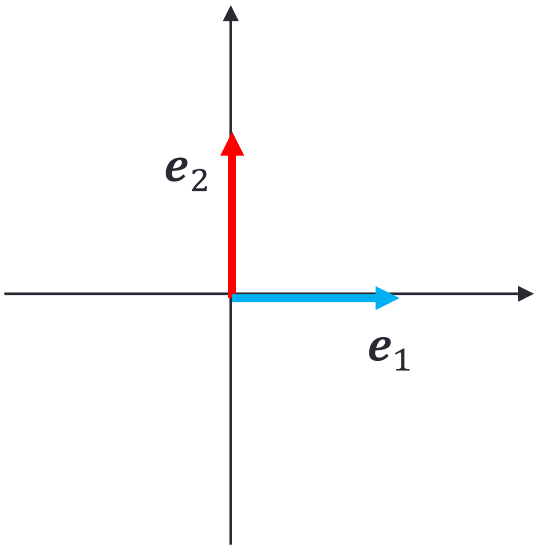


$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]{f_C}$$



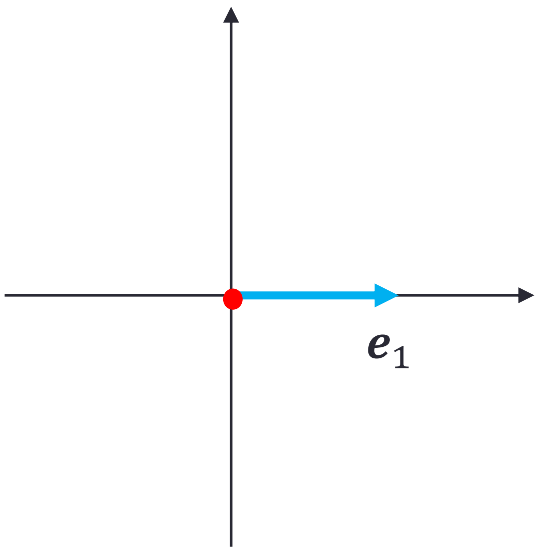
$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad f_D\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



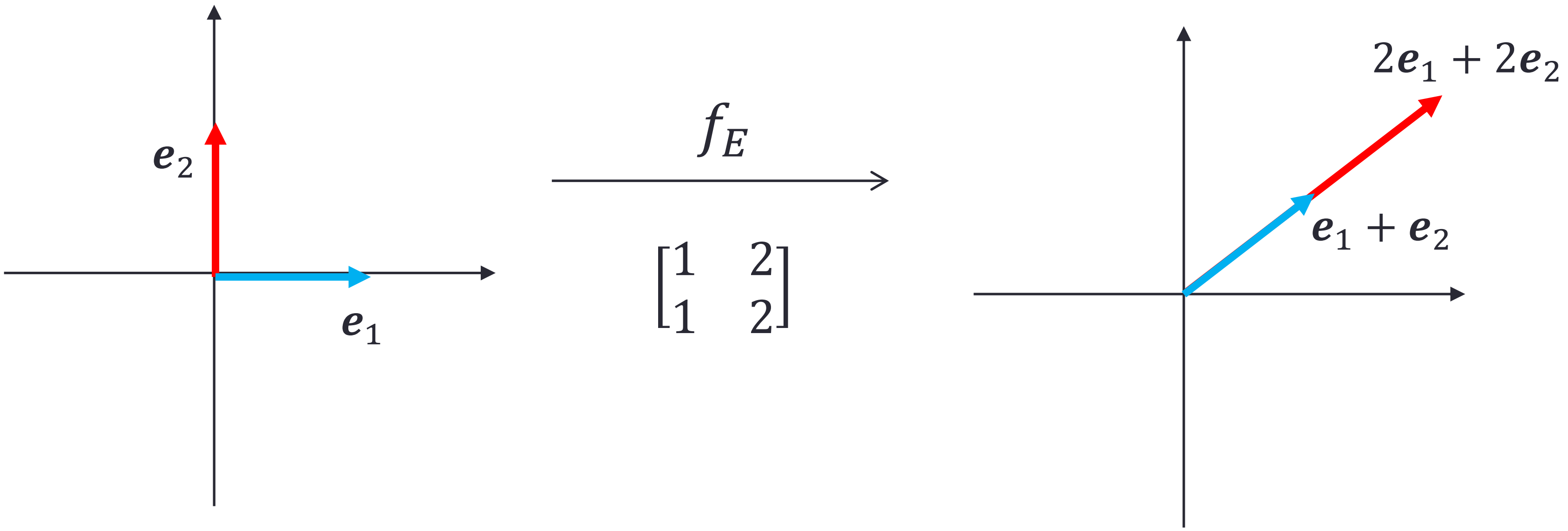
$$\xrightarrow{\;f_D\;}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



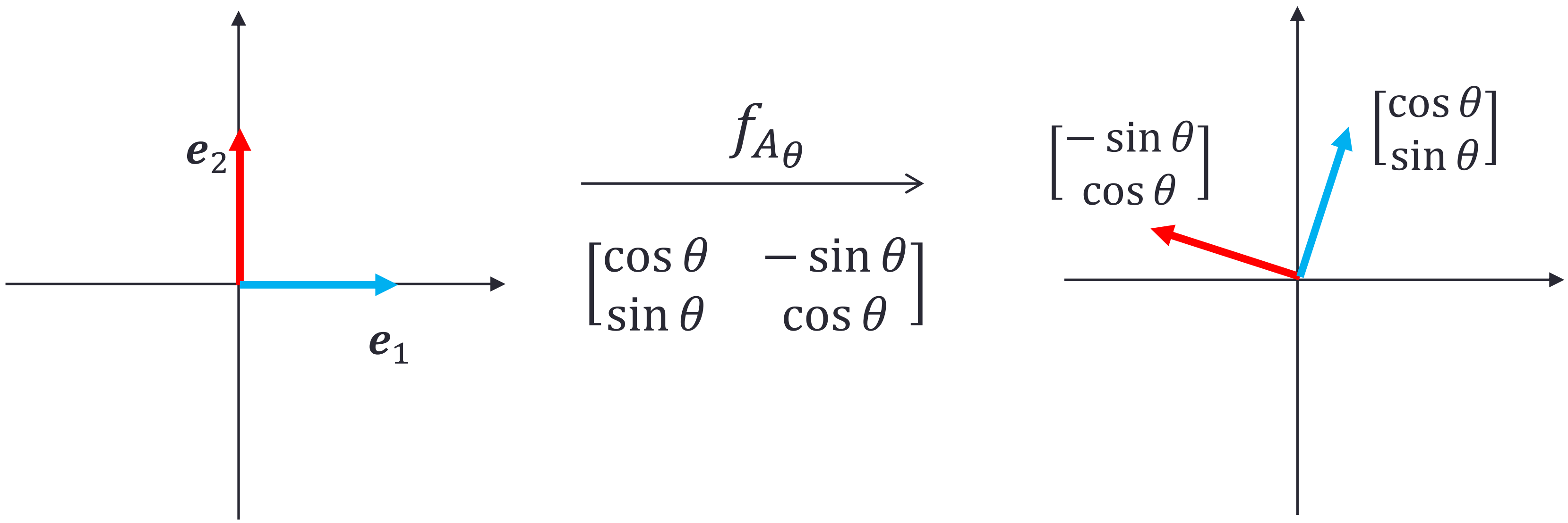
$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad f_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

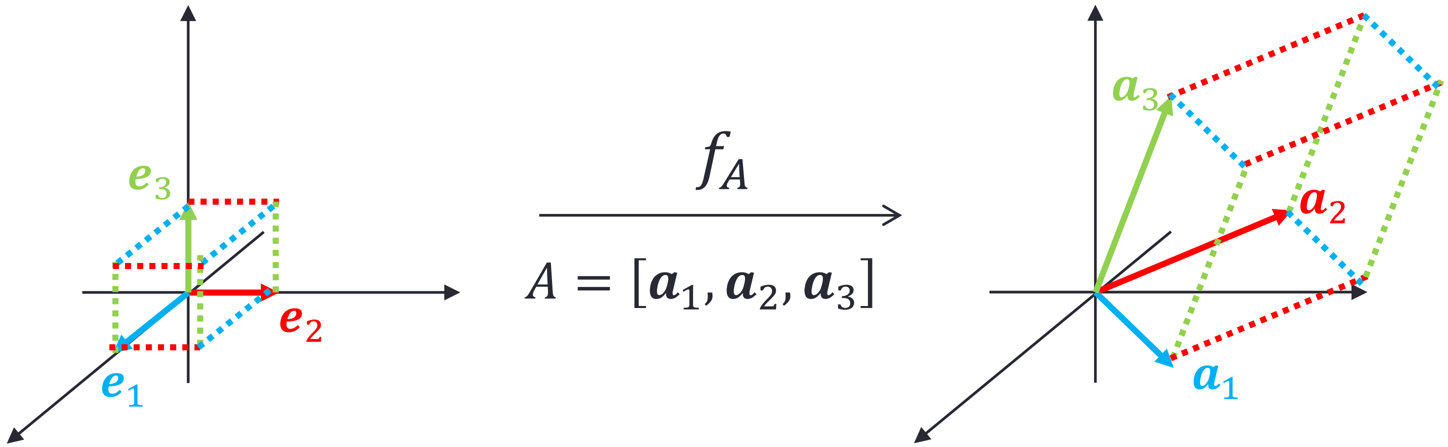
$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad f_{A_\theta}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



$$|A_\theta| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

符号付き体積拡大率

- 3次元の場合も同様である.
- 3次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ が定める線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える.
- $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が張る単位立方体は, f_A によって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る平行六面体に移る.
- この平行六面体の「符号付き体積」が $|A|$ である.



- ここで符号は平行六面体の向きに関係している(右手系, 左手系).
- 例えば, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が張る立方体の体積は 1, 一方で $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ が張る立方体の体積は -1 と考える.

符号付き体積拡大率（発展）

- 一般の n 次正方行列 A の行列式は, A が定める線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の「符号付き体積拡大率」であると幾何学的に解釈できる.
- この観点から次の定理は自然なものである.

定理8.8

- n 次正方行列 A, B に対して

$$|A\,B| = |A||B|$$

- A が正則であることと, $|A| \neq 0$ は同値である.

- 行列式の定義からこの性質を導くことは結構むつかしい.

4次正方行列の行列式

- サイズの大きな行列の行列式を定義通りに計算するのは現実的ではない.
- 例えば, 4次正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ の行列式は次の通りである.

$$
\begin{aligned}
|A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\
& + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\
& + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
& + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\
& + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\
& + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}
\end{aligned}
$$

- 以下では行列式の基本性質を解説し, 効率よく計算する方法を紹介する.

余因子展開(の特別な場合)

- 行列式の計算において次の定理は基本的である.

定理8.9

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- この性質を帰納的に用いることで，上半三角行列の行列式は対角成分の積で与えられることが分かる.

定理8.10

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{(n-1)(n-1)} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

余因子展開(の特別な場合)(証明)

- 証明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{11} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{2(\tau(1)+1)} \cdots a_{i(\tau(i-1)+1)} \cdots a_{n(\tau(n-1)+1)}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(QED)

余因子展開(の特別な場合)(例)

例8.11

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 15$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 28\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 2520$$

転置不変性・交代性

定理8.12

- 正方行列 A の行列式 $|A|$ に関して次が成立する.

1. 転置不変性:

$$|A| = |{}^tA|$$

2. 交代性:列を入れ替えると行列式 $|A|$ の値は (-1) 倍となる.

$$\left|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right| = -\left|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right|$$

特に2つの列が等しい行列の行列式は 0 である.

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = 0$$

- 転置不変性により,交代性は行に関しても成立する.
- 後に出てくる多重線形性により,交代性の2つの条件は同値であることが分かる.

転置不変性(証明)

定理8.12(1)

- n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ に関して次が成立する.

1. 転置不変性: $|A| = |{}^tA|$

- 正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ とすると, ${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} なので,

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$ (並び変えた)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$ ($\because \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$)

$$= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$ (σ が S_n を動くとき σ^{-1} も S_n のすべての元を動く)

$$= |A|$$ (QED)

交代性（証明）

定理8.12（2）
- n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ に関して次が成立する.

2. 交代性：列を入れ替えると行列式 $|A|$ の値は (-1) 倍となる.

- 転置不変性により行の入れ替えについて示せばよい.
- 正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ とし，i 行と j 行を入れ替えた行列を $B=\left(b_{ij}\right)$ とすると

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots b_{j\sigma(j)}\cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(i)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\left(-\operatorname{sgn}(\tau)\right) a_{1\tau(1)}\cdots a_{j\tau(j)}\cdots a_{i\tau(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \qquad \left(\tau=\sigma\,(i\ j),\ \operatorname{sgn}(\tau)=-\operatorname{sgn}(\sigma)\right)$$

$$=-\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)}\cdots a_{i\tau(i)}\cdots a_{j\tau(j)}\cdots a_{n\tau(n)} \qquad \text{（並び変えた）}$$

$$=-|A| \qquad \text{(QED)}$$

転置不変性・交代性（例）

例8.13

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -20$$

多重線形性

定理8.14（多重線形性）

1. 1つの列を c 倍すると行列式は c 倍になる.

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, c\,\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = c\,|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$$

2. 第 i 列が2つの列ベクトルの和である行列の行列式は，他の列は同じで第 i 列に各々の列ベクトルを取った行列の行列式の和になる.

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i + \tilde{\boldsymbol{a}}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$$

- 特に，ある列の定数倍を他の列に加えても行列式 $|A|$ の値は変わらない.

$$\left|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right| = \left|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i + c\,\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right|$$

- これらは行に関しても成立する.

多重線形性1(証明)

定理8.14(多重線形性1)

1. 1つの列を c 倍すると行列式は c 倍になる.
$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, c\,\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = c\,|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$$

- 定理8.11の交代性を利用して, 行について示す.
- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ とし, i 行を c 倍した行列を $B = (b_{ij})$ とすると

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \left(c\, a_{i\sigma(i)}\right) \cdots a_{n\sigma(n)} \qquad (i \text{ のみ } b_{i\sigma(i)} = c\, a_{i\sigma(i)})$$

$$= c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c\,|A|$$ (QED)

多重線形性2(証明)

定理8.14(多重線形性2)

2. 第 i 列が2つの列ベクトルの和である行列の行列式は，他の列は同じで第 i 列に各々の列ベクトルを取った行列の行列式の和になる．
$$|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i+\widetilde{\boldsymbol{a}}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n|=|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n|+|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{a}}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n|$$

- 定理8.11の交代性を利用して，行について示す．
- n 次正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ で，i 行が $b_{ij}+c_{ij}$ となっていて，A の i 行を b_{ij} としたものを B，A の i 行を c_{ij} としたものを C とする．

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots\left(b_{i\sigma(i)}+c_{i\sigma(i)}\right)\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots b_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots c_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=|B|+|C|$$ (QED)

交代性・多重線形性（例）

例8.15

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 7 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 18\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

交代性・多重線形性(例)

例8.16

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 16$$

交代性・多重線形性（練習問題）

練習問題8.17

- 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

交代性を持つ多重線形写像

定理8.18

- n 変数の関数 $f\colon \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が多重線形

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_i', \cdots, \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n) + f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i', \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, c\,\boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = c\,f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$

であり，交代性を持つとき

$$f\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n\right) = -f\left(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_i, \cdots, \boldsymbol{x}_n\right)$$

f は行列式を使って次のように表すことができる.

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \det[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \cdot f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

ここで，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底.

- 行列式は，交代性を持つ多重線形写像で，$f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ となるものということができる.

交代性を持つ多重線形写像(証明)

- $\boldsymbol{x}_i = {}^t[x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}]$ とすると $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\boldsymbol{e}_j$

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1j_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \cdots, \sum_{j_n=1}^{n} x_{nj_n}\boldsymbol{e}_{j_n}\right)$$

- 多重線形性より

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} x_{1j_1} \cdots x_{nj_n} f\left(\boldsymbol{e}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j_n}\right)$$

- 交代性より $\boldsymbol{e}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j_n}$ の中に同じものがあると $f\left(\boldsymbol{e}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j_n}\right) = 0$ であるから，n^n 個の和のうち，$j_1, \cdots, j_n$ が $1, \cdots, n$ の置換になっているものだけが残る.

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} f\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right)$$

- 交代性より $f\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ であるから

$$f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

$$= f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \det[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \qquad \text{(QED)}$$

まとめ

- 置換，行列式の定義
- 符号付き体積，拡大率
- 行列式の基本的性質
  - 転置不変性
  - 交代性
  - 多重線形性