線形代数
第9回「余因子展開」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 行列式は行列の正則性を判定する指標であった(幾何学的な説明を与えただけで, 証明はしていない).
- 前回に引き続き, その具体的な計算方法に関して解説する.
- また行列式を利用した, 逆行列の具体的な計算方法も紹介する.

1. 乗法性, ブロック行列
2. 余因子展開, 余因子行列

乗法性

- 行列の乗法性は重要な性質なので，再掲する．

定理9.1

- n 次正方行列 A, B に対して

$$|A\,B| = |A||B|$$

- n 次正方行列 A は線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の符号付き体積拡大率という意味を持っていた．
- この幾何学的意味から，行列式の乗法性を理解することができる（数学的な証明ではない）．

乗法性(2次正方行列)

例9.2

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ について，行列式の乗法性を確認する.

$$|A\ B| = \begin{vmatrix} ae+bg & ag+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$$

$$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$$= aecf + adef + bcfg + bdgh - (acef + adfg + bcef + bdgh)$$

$$= adef + bcfg - adfg - bcef$$

$$= (ad-bc)(eh-fg)$$

$$= |A||B|$$

乗法性(証明)

- $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ としたとき，B の行ベクトルを，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ とする．
  すなわち，$\boldsymbol{b}_j=(b_{j1}, b_{j2}, \cdots, b_{jn})$ とする．

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\boldsymbol{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\boldsymbol{b}_{j_n} \end{bmatrix}$$

- 多重線形性(定理8.14)を繰り返し適用すると

$$|AB|=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{1j_n}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{j_n} \end{vmatrix}$$

- n^n 個の和になるが，定理8.12(交代性)より，$\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_n}$ の中に同じものがあると行列式は 0 になるため，$j_1, \cdots, j_n$ が異なるものだけが残る．

$$|AB|=\sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\in S_n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{j_n} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{vmatrix}$$

- 交代性(定理8.12)より，$\boldsymbol{b}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{j_n}$ を $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ に並び替えるには，σ を互換で表した回数だけ符号が反転するため

$$|AB|=\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{vmatrix}=|A||B|$$

(QED)

スカラー倍

- 行列のスカラー倍に関しては，A を n 次正方行列，$k \in \mathbb{R}$ としたとき，次が成り立つことに注意．

$$|k\,A| = k^n\,|A|$$

例9.3

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

ブロック行列

定義9.4

- A, B, C, D をそれぞれ $k \times k, k \times l, l \times k, l \times l$ 型の行列とする.
- このとき，次の形の $(k + l)$ 次正方行列をブロック行列（区分行列）という.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

- 与えられた行列にブロック行列としての分解を与えることを，ブロック行列分解という.

ブロック行列（例）

例9.5

- ブロック行列分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

において，$A = [1]$, $B = [2\ 3]$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ となる.

- 同じ行列に対して，複数のブロック行列分解が存在する.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

- ブロック数を増やしたり，行と列で分解を変えることとで，より一般のブロック行列を定義することができるが，簡単のため，この講義では上記のような分解のみを考える.

ブロック行列

定理9.6

- A, B, C, D をそれぞれ $k \times k, k \times l, l \times k, l \times l$ 型の行列とする.
- また O を零行列とする.

1. $C = O$ であるとき

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

2. $B = O$ であるとき

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

ブロック行列（例）

例9.7

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} |9| = -27$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) = 8$$

ブロック行列(問題)

問題9.8

- 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \left|\begin{array}{cc|c} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} |3| = 264$$

余因子展開(の特別な場合)

- 前回の定理8.9をもう一度見てみる.

定理9.9

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 第1列は a_{11} 以外が 0 となっている場合には, a_{11} を外に出し, 行列式を小さくできる.
- 同様のことが他の要素についてもできないだろうか?
- 要素を移動させて, 上記のような形にすればよい.

余因子

定義9.10

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} と書く.

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j\text{ 列} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

（赤字部分を除く）

- これらは A の余因子と呼ばれる.

余因子(例)

例9.11

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

とすれば，9個の余因子が考えられる．例えば

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

例9.12

- $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して，4つの余因子が考えられる．

$$A_{11} = [d] \quad A_{12} = [c] \quad A_{21} = [b] \quad A_{22} = [a]$$

余因子展開

定理9.13

- n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に関して

1. $|A|$ の第 i 行に関する余因子展開として次が成り立つ.

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

2. $|A|$ の第 j 列に関する余因子展開として次が成り立つ.

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

3. また, $i \neq k$ のとき

$$(-1)^{k+1}a_{i1}|A_{k1}| + \cdots + (-1)^{k+n}a_{in}|A_{kn}| = 0$$

4. また, $j \neq k$ のとき

$$(-1)^{1+k}a_{1j}|A_{1k}| + \cdots + (-1)^{n+k}a_{nj}|A_{nk}| = 0$$

余因子展開(証明)

- n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の第 i 行ベクトルを次のように n 個に分解すると
$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]=[a_{i1},0,0,\cdots,0]+[0,a_{i2},0,\cdots,0]+\cdots+[0,0,\cdots,a_{in}]$
- 多重線形性(定理8.14)より

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

- 交代性(定理8.12)を使い，①のそれぞれにおいて，行の入れ替えを $i-1$ 回と，列の入れ替えを $j-1$ 回繰り返し a_{ij} 要素を左上に移動させる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 余因子の特別な場合(定理8.9)により，これは $(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ に等しいため，①は

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

- また，A の i 行目を k 行目にコピーした行列を B とすると，交代性(定理8.12)により $|B|=0$ であり，$B_{kj}=A_{kj}$ であるから，k 行目に対して上記と同様にすると，

$$0=|B|=(-1)^{k+1}a_{i1}|A_{k1}|+\cdots+(-1)^{k+n}a_{in}|A_{kn}|$$

- 列に関する余因子展開も同様に示すことができる．(QED)

余因子展開(例)

例9.14

- 第1行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 63 + 52 \quad = 1$$

- 第2列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -63 + 4 + 60 \quad = 1$$

- 各項の符号に注意せよ.

余因子展開(問題)

問題9.15

- 第2行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 4 - 0 = 1$$

- 第3行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -8 + 60 - 51 = 1$$

余因子展開（問題）

問題9.16

- 第1列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 3 - 8 = 1$$

- 第3列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 52 - 0 - 51 = 1$$

余因子行列

定義9.17

- n 次正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ に対して

$$a_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$$

とおき，余因子という(a_{ij}^* と A_{ji} の添え字が逆になっていることに注意).

- n 次正方行列

$$\tilde{A} = \left(a_{ij}^*\right)$$

とおき，A の余因子行列という.

余因子行列(例)

例9.18

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}|A_{11}| = d$$

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2}|A_{21}| = -b$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1}|A_{12}| = -c$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2}|A_{22}| = a$$

であるから

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

余因子行列(例)

例9.19

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$ に対して

$$a_{11}^{*}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=6 \qquad a_{12}^{*}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-7$$

$$a_{13}^{*}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5 \qquad a_{21}^{*}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-9$$

$$a_{22}^{*}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7 \qquad a_{23}^{*}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4$$

$$a_{31}^{*}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad a_{32}^{*}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=7$$

$$a_{33}^{*}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$$

なので, A の余因子行列は

$$\tilde{A}=\left(a_{ij}^{*}\right)=\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

余因子行列(定理)

定理9.20

- n 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ に関して

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = |A|\,E_n$$

が成り立つ.

例9.21

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であるので,

$$A\,\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|\,E_2$$

$$\tilde{A}\,A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|\,E_2$$

余因子行列(証明)

- $A = \left(a_{ij}\right)$ について余因子展開(定理9.11)より, $i \neq j$ に対して

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}| = a_{i1} a_{1i}^{*} + \cdots + a_{in} a_{ni}^{*} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}^{*}$$

$$0 = (-1)^{j+1} a_{i1} \left|A_{j1}\right| + \cdots + (-1)^{j+n} a_{in} \left|A_{jn}\right| = a_{i1} a_{1j}^{*} + \cdots + a_{in} a_{nj}^{*} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{*}$$

- したがって

$$A\,\tilde{A} = \left(a_{ij}\right)\left(a_{ij}^{*}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{*}\right) = \begin{bmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\,E_n$$

- $\tilde{A}\,A = |A|\,E_n$ についても同様.(QED)

余因子行列(例)

例9.22

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$ の行列式は $|A|=-21$, 余因子行列は

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

であり

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-21 & 0 & 0\\ 0 & -21 & 0\\ 0 & 0 & -21\end{bmatrix}=-21E_3$$

$$\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-21 & 0 & 0\\ 0 & -21 & 0\\ 0 & 0 & -21\end{bmatrix}=-21E_3$$

余因子行列(定理)

定理9.23

- n 次正方行列 A が正則である必要十分条件は $|A| \neq 0$ であり，このとき逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

で与えられる.

- 一般に，逆行列を計算するのには掃き出し法を用いるのが簡単である(第6回講義).
- しかし，理論的に逆行列の存在を保証したい場合なのでは，定理9.21が便利である.

余因子行列(定理9.23)の証明

- 十分性は定理9.20から示すことができる. つまり

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = |A|\,E_n$$

より

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = E_n$$

- 逆に, 逆行列が存在すると仮定すると, $A\,A^{-1} = E_n$ であるから, 両辺の行列式を考えて

$$1 = |E_n| = |A\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$$

- 特に $|A| \neq 0$ である. (QED)

余因子行列と逆行列

例9.24

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であり

$$A\,\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

$$\tilde{A}\,A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

であることから，逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

を再現することができる．

余因子行列と逆行列

例9.25

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ であった.
- A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{-21}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

クラメルの公式

定理9.26

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

の解は，次のように行列式を使って書くことができる．

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

- 分母は係数行列の行列式であり，分子は，係数行列の i 列目を定数ベクトルで置き換えたものである．

クラメルの公式（定理9.26）の証明

- 係数行列を $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$，変数ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$，定数ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とすると，方程式は $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書くことができる.
- A の i 列目を b で置き換えた行列を A_i とすると,

$$|A_i| = |[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{a}_n]|$$

$$= |[\boldsymbol{a}_1, \cdots, A\,\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{a}_n]| \qquad （A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\text{ だから}）$$

$$= \left|\left[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right]\right| \qquad （A\,\boldsymbol{x}\text{ を展開}）$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i |[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n]| \qquad （\text{多重線形性}）$$

$$= x_i |[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n]| \qquad （\text{交代性により } i \text{ だけが残る.}）$$

$$= x_i |A|$$

$$\therefore x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad （\text{QED}）$$

余因子行列(問題)

問題9.27

- 次の行列が正則かどうか判定し，正則の場合には余因子行列を計算することで逆行列を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

余因子行列(問題)

- A の行列式は，第1行に関して余因子展開すると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

であるから，A は正則である．逆行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B の行列式は，第1列に関して余因子展開すると

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

であるから，B は正則ではない．

余因子行列（問題）

- C の行列式は，第3列に関して余因子展開すると

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

であるから，C は正則である．

- 余因子行列の計算は面倒だが，結果だけを書いておくと

$$\tilde{C} = C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 実際に逆行列になっていることを確認せよ．

まとめ

- ブロック行列
- 余因子展開
- 余因子行列