線形代数
第12回「固有値問題」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- これまで学んだ内容の応用として，固有値問題を扱う.
- これは線形代数で最も重要な対角化の理論（次回）の基礎にもなる.

1. 固有値問題，固有値，固有ベクトル
2. 固有多項式，ケーリー・ハミルトンの定理

固有値問題

- 行列はベクトルを別のベクトルに変換する．つまり

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

と言ったように，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ に変換される．

- これを $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ は線形写像

$$f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$$

を定めると考えた．

- 今回考えるのは次の問題である．

問題12.1

- n 次正方行列 A に対して，線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える．
- 方向を変えない特別なベクトルは存在するか?
- その倍率は?

固有値問題(例)

例12.2

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ に対しては，特別な方向が2つある.

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 倍率は 5:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 倍率は -2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ も特別なベクトルであるが，上記と同じ方向であることに注意.

固有値・固有ベクトル

- A を n 次正方行列とする.

定義12.3

- 写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，ある $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在し

$$f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\, \boldsymbol{v}$$

が成り立つとき（つまり $A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ が成り立つとき），λ を A の固有値，v を A の固有ベクトルという.

- $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ は自明に上式を満たすので，$\boldsymbol{v} \neq 0$ の条件が課されている.
- 固有ベクトルが1つあれば，その（零でない）スカラー倍も固有ベクトルである.

固有空間

定義12.4

- $\lambda \in \mathbb{R}$ を f_A の固有値とするとき，部分空間

$$V(\lambda) = \{\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\, \boldsymbol{v} \,\} \subset \mathbb{R}^n$$

  を固有値 λ の固有空間という.

- $\mathbf{0} \in V(\lambda)$ に注意.

- つまり，固有値 λ に属するベクトル全体と零ベクトルの集合である.
- $V(\lambda)$ は「A を左から掛けるのと，λ 倍することが同じになるベクトル全体」.

$$A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$$

固有空間(例)

例12.5

- 先の例 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ で考えると, A の固有値は $5,-2$ であり

$$V(5)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle,\ V(-2)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}\right\rangle$$

である.

- 厳密には, 他に固有値がないこと, 固有空間が上の固有ベクトルの定数倍で尽きることを示す必要がある.

- $\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ を $\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ と略記することもある.

固有空間(例)

- 固有値と固有ベクトルは存在するとは限らない.

例12.6

- 行列 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ が定義する線形写像

$$f_A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ の $\frac{\pi}{2}$ 回転であるが，固有値も固有ベクトルも存在しない.

- より一般に，回転行列 A_θ は θ が π の倍数でない限り，固有値と固有ベクトルは存在しない.

- 一方で，同様の線形写像 $f_{A_\theta}\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ には固有値と固有ベクトルが存在する.

固有多項式

- E_n を n 次単位行列とする（行列のサイズが明らかなときには単に E と書く）.

定義12.7（固有多項式）

- n 次正方行列 A に対して，行列式

$$\varphi_A(t) = |t\,E_n - A|$$

を A の固有多項式という.

- 固有多項式を $|A - t\,E_n|$ で定義する流儀もあるが，その場合は最高次 t^n の係数が $(-1)^n$ となって扱いにくい.

固有多項式(例)

例12.8

- 行列 $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ の固有多項式は

$$\varphi_A(t)=|t\,E_2-A|=\begin{vmatrix}t-4 & -3\\-1 & t-2\end{vmatrix}$$

$$=(t-4)(\mathrm{t}-2)-(-3)\cdot(-1)\ =t^2-6t+5$$

$$=(t-1)(\mathrm{t}-5)$$

- 一般に, n 次正方行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は t に関して n 次の多項式である.
- 例えば, 定数係数は

$$\varphi_A(0)=|-A|=(-1)^n|A|$$

で与えられる.

固有多項式

定理12.9

- $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ なる線形写像に関して，次は同値である：

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有値
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有多項式の解，つまり $\varphi_A(\lambda) = 0$

証明

- 正方行列 B に関して次が同値であったことを思い出す．
  1. $|B| = 0$，つまり B が正則でない．
  2. 連立一次方程式 $B\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明（$\mathbf{0}$ でない）解を持つ．
- これより $\varphi_A(\lambda) = |\lambda\,E_n - A| = 0$ は $\lambda\,E_n - A$ を係数行列とする連立一次方程式

$$(\lambda\,E_n - A)\,\boldsymbol{v} = 0$$

  が非自明な解 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を持つことと同値．
- つまり，ある $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して $A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$.

重複度

定義12.10（重複度）

- A の固有値 λ の**重複度**とは，固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解 $t=\lambda$ の重複度．
- つまり

$$\varphi_A(t) = (t-\lambda)^k \varphi(t) \qquad (\varphi(\lambda) \neq 0)$$

となる $k \in \mathbb{N}$ のこと．

- 一般に，固有空間 $V(\lambda)$ の次元は，固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解 $t=\lambda$ の重複度以下となる．
- この講義では，重複度 1 の場合のみを扱うので，あまり気にする必要はない．

固有値問題(例)

例12.11

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ が定義する線形写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える.
- 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$$

- 定理12.9の証明から分かるように，固有値 $t = \lambda$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を求めるには

$$(\lambda\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を解けばよい.

固有値問題(例)

例12.11(つづき)

- $t=1$ の場合, $(E_2-A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ は連立方程式

$$\begin{aligned} -3x-3y&=0 \\ -x-y&=0 \end{aligned}$$

と同値であり, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$ が分かる.

- したがって, $V(1)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\}$
- $t=5$ の場合, $(5\,E_2-A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ は連立方程式

$$\begin{aligned} x-3y&=0 \\ -x+3y&=0 \end{aligned}$$

と同値であり, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ が分かる.

- したがって, $V(5)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{bmatrix} 3c \\ c \end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\}$

固有値問題(問題)

問題12.12

- 次の行列の固有値空間を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

固有値問題(3次正方行列の例)

例12.13

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \\ 3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値空間を求める.

$$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 3 & t-7 & 3 \\ -3 & 5 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 3 & t-7 & 3 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t & -1 & 2 \\ 3 & t-7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)\begin{vmatrix} t & -3 & 2 \\ 3 & t-10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t & -3 \\ 3 & t-10 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1)(t-9)$$

であるから, 固有値は $t = 1, 2, 9$.

- $t = 1$ の場合, $(E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ と同値であり $V(1) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$
- $t = 2$ の場合, $(2\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ と同値であり $V(2) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$
- $t = 9$ の場合, $(9\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ と同値であり $V(9) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right\rangle$

ケーリー・ハミルトンの定理

- 固有値問題とは関係ないが，固有多項式の重要な応用例として
ケーリー・ハミルトンの定理を紹介する.

定義12.14

- A を n 次正方行列とする.
- $\mathbb{R}$ 係数多項式

$$\phi(x) = a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

が与えられたとき，$\phi(x)$ に A を代入する操作を

$$\phi(A) = a_m\, A^m + a_{m-1}\, A^{m-1} + \cdots + a_1\, A + a_0\, E_n$$

で定義する.

- $\phi(A)$ は n 次正方行列である.
- 例えば，$\phi(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ であれば

$$\phi(A) = 2\, A^3 - A^2 + 5\, E_n$$

ケーリー・ハミルトンの定理

定理12.15(ケーリー・ハミルトンの定理)
- 正方行列 A に対して, $\varphi_A(A) = O$ が成り立つ.

- 例えば, 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5$$

であるから

$$A^2 - 6\,A + 5\,E_2 = O$$

- 実際

$$A^2 - 6\,A + 5\,E_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 - 6\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ケーリー・ハミルトンの定理(2次)

例12.16

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると

$$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$$

$$= t^2 - \mathrm{tr}(A)\, t + |A|$$

- ここで, $\mathrm{tr}(A) = a + d$ と置いた.
- 実際に

$$\varphi_A(A) = A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + |A|\, E_2$$

が成り立つことを確認せよ.

まとめ

- 固有値問題
  - 固有値
  - 固有ベクトル
- 固有多項式
  - ケーリー・ハミルトンの定理