

線形代数

第13回「対角化」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slides/>

今日の内容

- 行列の対角化に関して解説する。

1. 固有値問題の復習

2. 行列の対角化

3. 対角化の応用

固有値問題

定義13.1

- n 次正方行列 A が定義する線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して, $\lambda \in \mathbb{R}$ と $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して

$$f_A(v) = \lambda v$$

となるとき, λ を A の**固有値**, v を A の**固有ベクトル**という.

定義13.2

- $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値とするとき, 部分空間

$$V(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f_A(v) = \lambda v\} \subset \mathbb{R}^n$$

を固有値 λ の**固有空間**という. $0 \in V(\lambda)$ に注意する.

固有多項式

定義13.3

- n 次正方行列 A に対して, 行列式

$$\varphi_A(t) = |t E_n - A|$$

を A の固有多項式という.

定理13.4

- 線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に関して, 次は同値である:

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有値

2. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有多項式の解, つまり $\varphi_A(\lambda) = 0$

固有値問題

- n 次正方行列 A の固有値と固有空間を求めるには

1. 固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解

$$\varphi_A(t) = 0$$

を求める. これらが固有値.

2. 各固有値 λ に対して

$$(\lambda E_n - A) v = 0$$

を解いて, 固有ベクトル v を求める. 固有値 λ に属する固有ベクトル全体と 0 の集合が固有空間 $V(\lambda)$.

固有値問題(例)

例13.5

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ が定義する線形写像 $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える.
- 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$$

なので、固有値は $t = 1, 5$.

- 固有値 $t = \lambda$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を求めるには

$$(\lambda E_2 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を解けばよい.

- $t = 1$ の場合, $(E_2 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より, $V(1) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$.
- $t = 5$ の場合, $(5 E_2 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より, $V(5) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

対角化

定義13.6

- n 次正方行列 A に対して、適当な n 次正方行列 P を見つけて

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{対角行列})$$

の形にすることを**対角化**という。

- 行列は必ず対角化できるわけではないが、この講義では対角化可能な行列だけを扱う(後述)。
- 行列の対角化には深い意味と強力な応用がある。

対角化の流れ

- 一般論を展開する前に具体的かつ基本的な場合を考察する。

例13.7

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有空間は $V(1) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(5) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ 。
- $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ を固有値 1, 5 に属する固有ベクトルとし, $P = [v_1, v_2]$ とすると

$$A P = A[v_1, v_2] = [A v_1, A v_2] = [v_1, 5 v_2] = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$A P = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- 固有値 1, 5 に属する固有ベクトル $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立であることが分かるので, 行列 $P = [v_1, v_2]$ の階数は 2, つまり正則である。
- 上記の式の両辺に左から P^{-1} を掛けることで

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

となり, A を対角化できた。

対角化の流れ

- 実際, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 1, 5 に属する固有ベクトルを並べて得られる行列として, $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ を考えれば,

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} P^{-1} A P &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が確認できる。

対角化定理

定理13.8

- n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が相異なるとする.
- v_i を固有値 λ_i の属する固有ベクトルとする.
- n 次正方行列 P を

$$P = [v_1, \dots, v_n]$$

で定義すると, P は正則になり

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- つまり P は A を対角化する.
- P が正則であることに関してはスライドの最後の補足を参照せよ.
- P の取り方は一意ではない.
- 証明に関しては, 直前の2次正方行列の議論がそのまま適用できる.

対角化(問題)

問題13.9

- 次の行列を対角化する行列 P と対角化後の行列を求めよ.
- また, 実際に対角化できていることを確認せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- 前回の講義で固有空間はすでに計算した.

行列の冪乗

例13.10

- 対角化の重要な応用として, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ に対して, A^{100} を求める.
- まず $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ であったので

$$(P^{-1} A P)^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix}$$

- 左辺の積を具体的に書くと

$$(P^{-1} A P)^{100} = P^{-1} A P P^{-1} A P \cdots P^{-1} A P = P^{-1} A^{100} P$$

- したがって

$$\begin{aligned} A^{100} &= P (P^{-1} A P)^{100} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + 3 \cdot 5^{100} & -3 + 3 \cdot 5^{100} \\ -1 + 5^{100} & 3 + 5^{100} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行列の冪乗(問題)

問題13.11

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ に関して, A^2, A^3, A^n を計算せよ.

- $A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 28 \\ 7 & -20 \end{bmatrix}$

- $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ であるから

$$(P^{-1} A P)^n = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

- 左辺は $P^{-1} A^n P$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-3)^n + 2^{n+2} & -4(-3)^n + 2^{n+2} \\ -(-3)^n + 2^n & 4(-3)^n + 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

対角化の応用(発展)

定義13.12

- 次の漸化式で定義される数列 $\{a_i\}$ はフィボナッチ数列と呼ばれる.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

- 具体的に値を求めてみると

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

- 一般項 a_n を線形代数を使って求めてみる.

- 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は, 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を使えば

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

- したがって

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix} = \dots = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

- つまり, 一般項を求めるには, 行列 A^n を計算すればよい.

対角化の応用(発展)

- 固有多項式は $\varphi_A(t) = t^2 - t - 1$, A の固有値は $\phi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- 関係式 $\varphi_A(\phi_{\pm}) = \phi_{\pm}^2 - \phi_{\pm} - 1 = 0$ を用いると

$$A \begin{bmatrix} \phi_{\pm} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\pm} + 1 \\ \phi_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\pm}^2 \\ \phi_{\pm} \end{bmatrix} = \phi_{\pm} \begin{bmatrix} \phi_{\pm} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- つまり, 固有空間は $V(\phi_+) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} \phi_+ \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(\phi_-) = \mathbb{R} \left\langle \begin{bmatrix} \phi_- \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$
- $P = \begin{bmatrix} \phi_+ & \phi_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば, $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{bmatrix}$
- 詳細は省略するが, A^{n-1} が求まって

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi_+^n - \phi_-^n \\ \phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1} \end{bmatrix}$$

- フィボナッチ数列の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_+^n - \phi_-^n)$$

他分野への応用

- ・ その他の重要な応用として
 - ・ 共分散行列の対角化(主成分分析)
 - ・ ヘッセ行列の対角化(多変数関数の極値の形状分析)
 - ・ 遷移行列の対角化(確率過程の時間発展分析)
 - ・ ...

などがある。

まとめ

- 固有値問題の復習
- 行列の対角化
- 対角化の応用

固有ベクトルの一次独立性(補足)

- 定理13.8では n 次正方行列 A に「相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在する」ことを仮定した.
- これは常に成り立つとは限らず、対角化可能性の十分条件である.

定理13.13

- n 次正方行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ に属する固有ベクトルを v_1, \dots, v_s とする.
- このとき v_1, \dots, v_s は線形独立である.

証明

- 帰納法で示す.
- まず、 $v_1 \neq 0$ は一次独立なので成り立つ.
- 次に v_1, \dots, v_r は一次独立だが、 v_1, \dots, v_r, v_{r+1} は一次独立でないと仮定する. このとき

$$v_{r+1} = \sum_{i=1}^r c_i v_i \quad \exists c_i \in \mathbb{R}, \exists c_j \neq 0 \quad (1)$$

固有ベクトルの一次独立性(補足)

- (1)の両辺に A を掛けて $A \mathbf{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^r c_i A \mathbf{v}_i$, これより

$$\lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^r c_i \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (2)$$

- 一方で, (1)の両辺に λ_{r+1} を掛けて

$$\lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^r c_i \lambda_{r+1} \mathbf{v}_i \quad (3)$$

- (2)と(3)から

$$\sum_{i=1}^r c_i (\lambda_{r+1} - \lambda_i) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

を得るが, 固有値が異なることから, $\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0$, かつ $\exists c_j \neq 0$ より, ある \mathbf{v}_i の係数は 0 ではない.

- これは $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ の一次独立性に矛盾する.