

論理学

第2回「命題と真理値」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

命題

- **命題** (proposition) とは真偽が確定している文のこと.
 - 「 $1 < 2$ 」
 - 「素数は無限に存在する」
 - 「すべての三角形は正三角形である」
 - 「2より大きな偶数は2つの素数の和として表すことができる」(ゴールドバッハ予想)
 - 「太郎は花子が好き」
 - 「慶應義塾大学の本部はSFCである」
 - 「慶應義塾大学は東京の大学である」
- 変数を含む文は真偽が確定できないので命題ではない.
 - 「 $x < 5$ 」
 - 「太郎はA子が好き」

命題変数

- それ以上分解できない「基本的な命題」を記号で表す.
 - 命題変数 (propositional variable) は基本的な命題を表す.
 - p, q, r, \dots
- 基本的でない命題
 - 複文は分解できるので基本的ではない.
 - 「太郎は花子が好きで, 花子も太郎が好き」
 - 「風が吹けば猫の数が減るので桶屋が儲かる」
 - 「太郎はSFCへの通学にバスあるいは自転車を使っている」

複合命題

- 基本的な命題を組み合わせて作った命題
 - 単文を組み合わせて複文にする.
- 命題を次の4つの方法で組み合わせる.

接続詞	記号	読み	意味	別記号
「かつ」	\wedge	論理積	どちらも成り立つ	\cap &
「または」	\vee	論理和	どちらかが成り立つ	\cup
「ならば」	\rightarrow	含意	ある条件で成り立つ	\supset \Rightarrow
「いいえ」	\neg	否定	逆が成り立つ	\sim

論理式

- **論理式** (logical formula) は複合命題を表す式

- **定義**

- 命題変数は論理式である.
- A と B が論理式の時, 次は論理式である.
 - $(A \wedge B)$
 - $(A \vee B)$
 - $(A \rightarrow B)$
 - $(\neg A)$

- **例**

- $(p \rightarrow q)$
- $(p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$
- $(\neg((p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)))$

括弧の省略

- 論理式に括弧が多過ぎるので、一部省略することにする。
 - 一番外側の括弧は省略しても良い。
 - 論理記号の結合の優先度を次のように決める。
 - $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow$
 - \wedge と \vee は左結合， \rightarrow は右結合とする。
 - $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r$
 - $p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$
 - $p \rightarrow q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

例

- $\neg p \wedge q \equiv (\neg p) \wedge q \equiv ((\neg p) \wedge q)$
- $p \rightarrow q \vee \neg r \equiv (p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$
- $\neg \neg p \rightarrow p \equiv ((\neg(\neg p)) \rightarrow p)$
- $p \vee \neg (q \rightarrow p) \equiv (p \vee (\neg (q \rightarrow p)))$

論理式を作る

- p は「太郎は花子が好き」を, q は「太郎は桃子が好き」を, r は「花子は太郎が好き」を表す命題変数とする.

- 次の文章を論理式として表しなさい.

- 「太郎は花子も桃子も好き」

$$p \wedge q$$

- 「太郎は花子か桃子のどちらかを好き」

$$p \vee q$$

- 「太郎は花子が好きだが, 花子は太郎が嫌い」

$$p \wedge \neg r$$

- 「太郎が花子を好きなら, 花子も太郎が好き」

$$p \rightarrow r$$

- 「太郎が桃子ではなく花子を好きなら, 花子は太郎が好き」

$$p \wedge \neg q \rightarrow r$$

- 「花子は桃子を好きな太郎が好き」

$$q \rightarrow r$$

真理値表

- 命題は、正しい時に「**真** (true, T)」という値を持ち、正しくない時に「**偽** (false, F)」の値を持つ。
 - 命題は「真」か「偽」かのどちらかの値を持つ。
 - 「真」の反対は「偽」であり、「偽」の反対は「真」である。
- 論理式の真偽は、命題変数の真偽によって決まる。
- 論理結合された命題の真偽は、結合する論理式の真偽によって決まる。

- 真理値表** (truth table) は、論理結合子ごとに真偽を表したもの。

$$A \wedge B$$

$A \backslash B$	T	F
T	T	F
F	F	F

$$A \vee B$$

$A \backslash B$	T	F
T	T	T
F	T	F

$$A \rightarrow B$$

$A \backslash B$	T	F
T	T	F
F	T	T

$$\neg A$$

A	$\neg A$
T	F
F	T

排他的論理和

- $A \vee B$ は A または B のどちらか一方が真の時に真である。
 - A と B の両方が真であっても、 $A \vee B$ は真となる。
- **排他的論理和** (exclusive or, xor)
 - A と B の両方が真となる場合を排除する。
 - A か B のどちらか一方のみが真の時に限る。

		$A \vee B$	
$A \backslash B$	T	F	
T	T	T	
F	T	F	

		$A \veebar B$	
$A \backslash B$	T	F	
T	F	T	
F	T	F	

$A \veebar B$ の代わりに $A \oplus B$ と書くこともある。

論理式の値

- 論理式 A に命題変数 p_1, p_2, \dots, p_n が現れる時, A の真偽値は, p_1, p_2, \dots, p_n の真偽によって決まる.
 - p_1, p_2, \dots, p_n の真偽から, 真理値表を繰り返し使って, A の真偽値を求めれば良い.
- 例
 - $p \rightarrow q \vee \neg p$ の真偽値

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \rightarrow q \vee \neg p$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

練習問題

- $p \vee \neg (q \rightarrow p)$ の真理値表を書きなさい.

p	q	$q \rightarrow p$	$\neg (q \rightarrow p)$	$p \vee \neg (q \rightarrow p)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

トートロジー

- 論理式 A に現れる命題変数 p_1, p_2, \dots, p_n の真偽に関わらず, 常に論理式 A の値が真であるとき, A はトートロジー (tautology) である (A は恒真 (valid) である) と言う.
 - p_1, p_2, \dots, p_n の真偽の組み合わせは 2^n 通り.
 - すべての組み合わせにおいて A の真偽を調べれば, トートロジーかどうか分かる.

- 定理:** 論理式がトートロジーであるかどうかは決定可能 (decidable) である.

- 例: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ はトートロジーである.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

練習問題

- $p \rightarrow p$ がトートロジーであることを示しなさい

p	$p \rightarrow p$
T	T
F	T

- $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ がトートロジーであることを示しなさい

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

まとめ

- 論理学とは
 - 数理論理学
- 命題
 - 命題変数
 - 論理結合子
 - 論理式
- 真理値表
 - 論理結合子の真理値表
 - トートロジー