

論理学

第3回「標準形」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

前回まで

- 論理学とは
 - 数理論理学
- 命題
 - 真偽が決まっている文
 - 命題変数
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 論理式
- 真理値表
 - 論理結合子の真理値表
 - トートロジー

部分論理式

- 論理式 A の真偽値の計算には, A を構成している論理式 (部分論理式) の真偽値が必要である.
- 定義: **部分論理式**
 1. A 自身は A の部分論理式である.
 2. A が $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \rightarrow C)$ の形をしている時, B のおよび C の部分論理式はすべて A の部分論理式でもある.
 3. A が $(\neg B)$ の形をしている時, B の部分論理式はすべて A の部分論理式でもある.
- 例
 - $(p \rightarrow \neg q) \vee (q \wedge r)$ の部分論理式をすべてあげよ.
 - $(p \rightarrow \neg q) \vee (q \wedge r)$, $(p \rightarrow \neg q)$, $(q \wedge r)$, p , $\neg q$, q , r

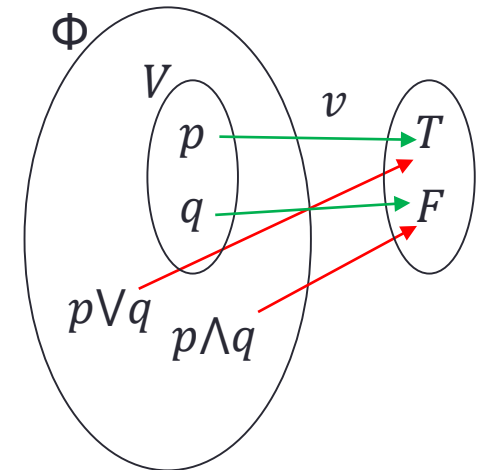
付値

- **付値** (assignment) とは, 命題変数全体の集合 V から真偽値への集合 $\{T, F\}$ への写像のこと.
 - すべての命題変数に真か偽を割り付ける.
 - 例: $V = \{p, q\}$ のとき, $v(p) = T, v(q) = F$ とする v は付値の一つ.

- 付値 v は, 論理式全体の集合 Φ から $\{T, F\}$ 写像に一意的に拡張することができる.

1. $v(A \wedge B) = T \Leftrightarrow v(A) = v(B) = T$
2. $v(A \vee B) = T \Leftrightarrow v(A) = T$ または $v(B) = T$
3. $v(A \rightarrow B) = T \Leftrightarrow v(A) = F$ または $v(B) = T$
4. $v(\neg A) = T \Leftrightarrow v(A) = F$

- 「 \Leftrightarrow 」は必要十分条件をあらわすメタな(説明のための)記号



- 論理式 A は**トートロジー**である
 \Leftrightarrow すべての付値 v に対して $v(A) = T$ である

必要条件と十分条件

- $A \rightarrow B$ が成り立つ時
 - A は B の**十分条件** (sufficient condition)
 - B は A の**必要条件** (necessary condition)

- 例
 - $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
 - $x = 2$ は, $x^2 = 4$ となる十分な条件
 - $x^2 = 4$ は, $x = 2$ となるのに十分ではなく, 必要な条件

 - 「太郎が花子を好きならば花子は太郎が好き」が成り立つ時
 - 「太郎が花子を好き」は「花子が太郎が好き」の十分条件だが
 - 「花子が太郎が好き」は「太郎が花子を好き」の必要条件ではない

充足可能

- トートロジーと双対となる概念
 - ある付値 v に対して $v(A) = T$ であるとき, A は**充足可能**である (satisfiable).
 - 充足可能でないとき, **充足不可能**である (unsatisfiable).

定理

- 論理式 A が**充足不可能**であるための**必要十分条件**は $\neg A$ が**トートロジー**となることである.

問題

- $((p \vee q) \rightarrow r) \vee (p \wedge q)$ の値を F にするには p, q, r にどのような値の組を与えれば良いか. すべての組合せを求めよ.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \wedge q$	$((p \vee q) \rightarrow r) \vee (p \wedge q)$
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F

同値な論理式

- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ を $A \equiv B$ と略す.
 - A と B は同値である (equivalent) と読む.
 - $v(A \equiv B) = T \Leftrightarrow v(A) = v(B)$
- **定理**: 以下の論理式はそれぞれトートロジーである.

冪等律

- $A \wedge A \equiv A$
- $A \vee A \equiv A$

結合律

- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

交換律

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$

対偶

- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

吸収律

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

分配律

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- $\neg \neg A \equiv A$

ド・モルガンの法則

- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

例

- **冪等律**

- $A \wedge A \equiv A$
- $p =$ 「太郎は花子が好き」
- $p \wedge p \equiv p$

- **対偶** (contraposition)

- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
- $\neg B \rightarrow \neg A$ は $A \rightarrow B$ の対偶
- 「叱られると勉強する」の対偶は？

- **二重否定**

- $\neg \neg A \equiv A$
- 英語では, 「I don't know nothing.» \equiv 「I know something.» ?
- 日本語では, 「知らないことはない」 \equiv 「知っている」
- 「全くない」の意味は, 「少しはある」あるいは「完全にない」?

命題定数

- つねに真である命題と常に偽である命題を表す論理式を命題定数として用意しておく.
 - \top と \perp を論理式に追加
 - 付値 v に対して, $v(\top) = T, v(\perp) = F$ とする
- 命題定数に対するトートロジー
 - $A \wedge \neg A \equiv \perp$
 - $A \vee \neg A \equiv \top$
 - $A \vee \perp \equiv A$
 - $A \vee \top \equiv \top$
 - $A \wedge \top \equiv A$
 - $A \wedge \perp \equiv \perp$
 - $\neg \top \equiv \perp$
 - $\neg \perp \equiv \top$
 - $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$
 - $A \equiv \top \rightarrow A$

論理的同値性

- $A \equiv B$ がトートロジーであるとき, A と B は論理的に同値であるという.
- A と B が論理的に同値であるとき, $A \sim B$ と書く.
 - 「 \sim 」は「論理的に同値である」というメタな記号

定理: 論理的同値性について次が成り立つ

1. $A \sim A$
2. $A \sim B$ ならば $B \sim A$
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$
4. $A \sim B$ ならば $C[A/p] \sim C[B/p]$

ここで $C[A/p]$ は C にあらわれる命題変数 p を A で置き換えた論理式

- 論理的に同値な論理式は置き換えても構わない.

論理和と論理積の拡張

- n 個の論理式 A_1, \dots, A_n に対して,
 - $\bigvee_{i=1}^n A_i$ は $(\dots((A_1 \vee A_2) \vee A_3) \vee \dots \vee A_n)$ を表す
 - $\bigwedge_{i=1}^n A_i$ は $(\dots((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \dots \wedge A_n)$ を表す
- 論理的同値性を議論する限りでは括弧を忘れてもよい
 - $\bigvee_{i=1}^n A_i \sim A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n$
 - $\bigwedge_{i=1}^n A_i \sim A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \dots \wedge A_n$

標準形

- **リテラル**(literal)
 - 命題変数あるいは命題変数に \neg がついたものをリテラルと呼ぶ.
 - $p, \neg q$ はリテラルであるが, $\neg\neg r$ はリテラルではない.
- **論理和標準形** (disjunctive normal form)
 - 任意の論理式に対して, それと論理的に同値な $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^{n_i} A_{i,j}$ の形をした論理式が存在する ($A_{i,j}$ はリテラル).
 - $(A_{1,1} \wedge A_{1,2} \wedge \cdots \wedge A_{1,n_1}) \vee (A_{2,1} \wedge A_{2,2} \wedge \cdots \wedge A_{2,n_2}) \vee \cdots \vee (A_{m,1} \wedge A_{m,2} \wedge \cdots \wedge A_{m,n_m})$
- **論理積標準形** (conjunctive normal form)
 - 任意の論理式に対して, それと論理的に同値な $\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^{n_i} A_{i,j}$ の形をした論理式が存在する ($A_{i,j}$ はリテラル).
 - $(A_{1,1} \vee A_{1,2} \vee \cdots \vee A_{1,n_1}) \wedge (A_{2,1} \vee A_{2,2} \vee \cdots \vee A_{2,n_2}) \wedge \cdots \wedge (A_{m,1} \vee A_{m,2} \vee \cdots \vee A_{m,n_m})$

論理和標準形への変換

- 与えられた論理式を論理和標準形に変換する.
 1. $A \rightarrow B \sim \neg A \vee B$ を使って「 \rightarrow 」を取り除く.
 2. $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$ と $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ を使って, すべての「 \neg 」を命題変数の前に移動させる.
 3. $\neg\neg A \sim A$ を使って命題変数の前の「 \neg 」を高々1つにする.
 4. $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ を使って, 「 \wedge 」を「 \vee 」の中に入れていく.

例

- $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
 1. $\neg(\neg p \vee q) \vee r$
 2. $(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r$
 3. $(p \wedge \neg q) \vee r$
 4. $(p \wedge \neg q) \vee r$
- $\neg(p \rightarrow q \wedge r)$
 1. $\neg(\neg p \vee (q \wedge r))$
 2. $\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r) \sim \neg\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)$
 3. $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$
 4. $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

練習問題

- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ を論理和標準形に変換しなさい.

$$\begin{aligned}
 ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p &\sim \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p \\
 &\sim (\neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \\
 &\sim ((\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee p \\
 &\sim (\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \vee p
 \end{aligned}$$

- $(p \rightarrow p \wedge \neg q) \wedge (q \rightarrow q \wedge \neg p)$ を論理和標準形に変換しなさい.

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow p \wedge \neg q) \wedge (q \rightarrow q \wedge \neg p) &\sim (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)) \\
 &\sim (\neg p \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p))) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p))) \\
 &\sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge q \wedge \neg p)
 \end{aligned}$$

練習問題

- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ を論理積標準形に変換しなさい.

$$\begin{aligned} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p &\sim \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p \\ &\sim (\neg\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p \\ &\sim (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee p) \end{aligned}$$

- $\neg(p \rightarrow q) \wedge ((q \rightarrow s) \rightarrow r)$ を論理積標準形に変換しなさい.

$$\begin{aligned} (p \rightarrow p \wedge \neg q) \wedge (q \rightarrow q \wedge \neg p) &\sim (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)) \\ &\sim (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \wedge \neg p) \end{aligned}$$

真理値表を用いた変換

- 論理和標準形 $\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^{n_i} A_{i,j}$ は論理式が真になる条件を並べたものである。
- $\neg(p \rightarrow q \wedge r)$ の真理値表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q \wedge r$	$\neg(p \rightarrow q \wedge r)$
T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	F

- 上記の表で T となっているところを取り出すことで $\neg(p \rightarrow q \wedge r)$ の論理和標準形は:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

論理結合子の制限

- 4つの論理結合子を用いてきた.
 - $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
- $A \rightarrow B \sim \neg A \vee B$ を用いることで「 \rightarrow 」は使わなくてもすべての論理式は書くことができる.
 - \wedge, \vee, \neg
- $A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$ を用いることで、「 \wedge 」は「 \neg 」と「 \vee 」で表すことができる. したがって、「 \neg 」と「 \vee 」ですべての論理式を書くことができる.
 - \vee, \neg
- $A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$ を用いることで、「 \vee 」は「 \neg 」と「 \wedge 」で表すことができる. したがって、「 \neg 」と「 \wedge 」ですべての論理式を書くことができる.
 - \wedge, \neg

まとめ

- 論理式について
 - 部分論理式
 - 付値
 - 同値な論理式
- 標準形
 - 論理和標準形
 - 論理積標準形
- 論理結合子の制限