

# 論理学

## 第4回「証明」

---

萩野 達也

[hagino@sfc.keio.ac.jp](mailto:hagino@sfc.keio.ac.jp)

# 前回まで

- 命題

- 真偽が決まっている文
- 命題変数
- 論理結合子 ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ )
- 論理式
- 真理値表
- トートロジー

- 標準形

- 論理和標準形
- 論理積標準形
- 論理結合子の制限

# 推論

- 真理値表を用いた命題の**正しさ**の定義
  - 基本的な命題(命題変数)の真偽値から, 命題の真偽を計算する.
- **推論**
  - すでに正しいと分かっている命題から, 別の正しい命題を導く
  - 推論規則を繰り返し用いて, 前提となる命題から, 命題導く
  - 「前提 $B_1, \dots, B_n$ から $A$ が推論される」
- **推論規則** (inference rule)
  - 正しい命題から正しい命題を導く規則
- 例
  - $A$  と  $A \rightarrow B$  から  $B$  を導く
  - **モーダスポネンス** (modus ponens)
  - **三段論法** (syllogism) とも呼ばれる
  - 「人間は死すべきもの」であり「ソクラテスは人間である」, ゆえに「ソクラテスは死すべきもの」である.

# 公理と定理

- **公理** (axiom)
  - 正しいと考える前提
  - 「異なった2点を通る直線はただ一つ存在する」
  - 「平行線は交わらない」
- **定理** (theorem)
  - 公理から推論規則を使って得られた命題
  - 定理を導く推論の過程を**証明** (proof) という
  - 「3 角形の内角の和は180 度である」
  - 「ピタゴラスの定理」

# 形式論理体系

- 扱っている論理学を形式的に扱う**体系**
  - 論理式の構文や操作に関する体系
  - 公理と推論規則からなる
- 古典命題論理 (classical propositional logic) の形式体系
  - ヒルベルト (Hilbert) の体系
    - 公理中心で推論規則はモーダスポネンスだけ
  - ゲンツェン (Gentzen) の**自然演繹** (natural deduction) の体系
    - 日常の推論に近いもの
    - **NK体系**
  - ゲンツェンの**sequent計算**の体系
    - 形式的な表現にすぐれている
    - **LK体系**

# LKの式

- LK 体系では次の式 (sequent) を用いる

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$$

- 意味
  - 「 $A_1$  から  $A_m$  をすべて仮定すると,  $B_1$  から  $B_n$  のどれかが導かれる」
- 「 $\vdash$ 」の読み方
  - ターンスタイル (turnstile, 回転扉)
  - ティー (tee)
- $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$ 
  - 「 $A_1, \dots, A_m$ 」 前件 (antecedent)
  - 「 $B_1, \dots, B_n$ 」 後件 (succedent)
  - 「前件から後件が導かれる」

# 式の特別な場合

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$$

- $m$ や $n$ は0でもかまわない
  - $\vdash B_1, \dots, B_n$ 
    - 仮定は必要なく「 $B_1$ から $B_n$ のどれかである」
  - $\vdash B$ 
    - 「 $B$ である」
  - $A_1, \dots, A_m \vdash$ 
    - 導かれるものがないので、「 $A_1$ から $A_m$ をすべて仮定すると矛盾する」
    - 「 $A_1$ から $A_m$ のすべてを仮定してはいけない」
    - 「 $A_1$ から $A_m$ のどれかではない」
  - $A \vdash$ 
    - 「 $A$ から導かれるものはない」
    - 「 $A$ ではない」
  - $\vdash$ 
    - 仮定は必要がないのに、導くものがない
    - 「矛盾している」

# LKの推論規則

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)}$$

前提の式  
推論規則の名前  
結論の式

- **前提** (premise) の式から, **結論** (conclusion) の式を得る

- $A$  は論理式
- $\Gamma, \Delta$  は論理式の列
  - 空でも構わない

- 例

$$\frac{A, A, \overset{\Gamma}{B}, \overset{\Delta}{C} \vdash \overset{\Delta}{D}}{A, B, C \vdash D} \text{ (CL)}$$

$$\frac{A, A \vdash \overset{\Gamma \text{空}}{A \wedge B}}{A \vdash A \wedge B} \text{ (CL)}$$

$$\frac{A \vee B, A \vee B \vdash \overset{\Gamma \text{空}}{A \wedge B}}{A \vee B \vdash A \wedge B} \text{ (CL)}$$

$$\frac{p \rightarrow q \vee r, p \rightarrow q \vee r, p \wedge s \vdash s \rightarrow t}{p \rightarrow q \vee r, p \wedge s \vdash s \rightarrow t} \text{ (CL)}$$



# LKの公理と推論規則

- 公理: **始式** (initial sequent) と定数

$$\frac{}{A \vdash A} \quad (\text{I})$$

$$\frac{}{\vdash \top} \quad (\top)$$

$$\frac{}{\perp \vdash} \quad (\perp)$$

- 構造に関する **推論規則**: weakening, contraction, exchange, cut

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\text{WL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \quad (\text{WR})$$

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\text{CL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \quad (\text{CR})$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \quad (\text{EL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \quad (\text{ER})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \quad (\text{Cut})$$

(ここで  $\Gamma, \Delta$  は論理式の列)

# 推論規則(つづき)

- 論理結合子に関する推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_1)$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_2)$$

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

# LKの公理

$$\frac{}{A \vdash A} \quad (I)$$

- 意味

- 「A から A を導くことができる」

- LKでは公理は実質一つだけ

- A は任意の論理式なので、実際には無数にある
- A が任意なので、A を実際の論理式に当てはめる必要がある

- 例

$$\frac{}{p \vdash p} \quad (I)$$

$$\frac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q} \quad (I)$$

$$\frac{}{p \rightarrow q \vee r \vdash p \rightarrow q \vee r} \quad (I)$$

$$\frac{}{A \vee B \vdash A \vee B} \quad (I)$$

# LKの定数に関する公理

$$\frac{}{\vdash \top} (\top) \qquad \frac{}{\perp \vdash} (\perp)$$

- 意味
  - 「真を導くことができる」
  - 「偽からは何も導くことはできない」

# Weakening, Contraction, Exchange推論規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (WL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (WR)}$$

- weakening**

- 前件や後件に任意の論理式を付け加えても構わない

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (CR)}$$

- contraction**

- 同じ論理式は1つに縮約することができる

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (EL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (ER)}$$

- exchange**

- 前件内あるいは後件内の論理式の順序を入れ替えても構わない

# Cut推論規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (Cut)}$$

- **cut**

- $A$  を**後件**に持つ式と,  $A$  を**前件**に持つ式から,  $A$  を**切り離れた**式を推論する
- $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$  を直接示すことが難しい
  - $A$  を別に示しておいて
  - $A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$  を推論する

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ (Cut')}$$

# 左と右の推論規則

- 規則の**結論部分**に論理結合子がある

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1)$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee R_2)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

左: 前件に論理結合子

右: 後件に論理結合子

# 「 $\wedge$ 」の推論規則

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1)$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

- 2つの左の規則 ( $\wedge L_1$ ,  $\wedge L_2$ )
  - 前件に「 $\wedge$ 」を追加する
  - 「 $A$  を  $A \wedge B$  にする」
  - 「 $B$  を  $A \wedge B$  にする」
- 1つの右の規則 ( $\wedge R$ )
  - 後件に「 $\wedge$ 」を追加する
  - 「 $A$  と  $B$  をあわせて  $A \wedge B$  にする」
  - 前提の2つの式から結論の式を推論する



# 「 $\vee$ 」の推論規則

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \quad (\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \quad (\vee R_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \quad (\vee R_2)$$

- 1つの左の規則 ( $\vee L$ )
  - 前件に「 $\vee$ 」を追加する
  - 「 $A$  と  $B$  をあわせて  $A \vee B$  にする」
  - 前提の2つの式から結論の式を推論する
- 2つの右の規則 ( $\vee R_1, \vee R_2$ )
  - 後件に「 $\vee$ 」を追加する
  - 「 $A$  を  $A \vee B$  にする」
  - 「 $B$  を  $A \vee B$  にする」

# 「 $\rightarrow$ 」の推論規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

- 1つの左の規則 ( $\rightarrow L$ )
  - 前件に「 $\rightarrow$ 」を追加する
  - 「後件の  $A$  と、前件の  $B$  をあわせて  $A \rightarrow B$  にする」
  - 前提の2つの式から結論の式を推論する
- 1つの右の規則 ( $\rightarrow R$ )
  - 後件に「 $\rightarrow$ 」を追加する
  - 「前件の  $A$  と、後件の  $B$  をあわせて  $A \rightarrow B$  にする」

# 「 $\neg$ 」の推論規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

- 1つの左の規則 ( $\neg L$ )
  - 前件に「 $\neg$ 」を追加する
  - 「後件の  $A$  を前件の  $\neg A$  にする」
- 1つの右の規則 ( $\neg R$ )
  - 後件に「 $\neg$ 」を追加する
  - 「前件の  $A$  を後件の  $\neg A$  にする」

# LKの証明図

- LK の証明図 (proof figure)
  - 始式(あるいは定数)から出発し, 推論規則を次々に適用していく過程を記述したもの
  - 証明図の一番下にある式を, その証明図の終式 (end sequent) という.
- 例: 証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{\vdash A, \neg A} \text{ (}\neg\text{R)} \\
 \frac{}{\vdash A, A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_2\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, A} \text{ (ER)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_1\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ (CR)}
 \end{array}$$

← 終式

- $S$  を終式とする証明図が存在する時,  $S$  はLKで証明可能である (provable) という.

# 練習問題

- 次の命題を証明しなさい.
  - $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
  - $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
  - $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$
  - $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
  - $\vdash \neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$\begin{array}{l} \hline A \vdash A \quad (I) \\ \hline \neg A, A \vdash \quad (\neg L) \\ \hline A \vdash \neg\neg A \quad (\neg R) \\ \hline \vdash A \rightarrow \neg\neg A \quad (\rightarrow R) \end{array}$$

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$\begin{array}{l} \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\ \frac{}{\vdash A, \neg A} \text{(\neg R)} \\ \frac{}{\neg\neg A \vdash A} \text{(\neg L)} \\ \frac{}{\vdash \neg\neg A \rightarrow A} \text{(\rightarrow R)} \end{array}$$

# $\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{B \vdash B} \\
 (\wedge L_2) \frac{B \vdash B}{A \wedge B \vdash B}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 (\wedge L_1) \frac{A \vdash A}{A \wedge B \vdash A}
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{}{A \wedge B, A \wedge B \vdash B \wedge A} \text{(}\wedge\text{R)} \\
 \frac{}{A \wedge B \vdash B \wedge A} \text{(CL)} \\
 \frac{}{\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A} \text{(}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}$$



$$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{A \vdash A} \\
 \text{(}\forall\text{L}_1\text{)} \frac{}{A \vdash B \vee A}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{(I)} \\
 \text{(}\forall\text{L}_2\text{)} \frac{}{B \vdash B \vee A}
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{}{A \vee B \vdash B \vee A, B \vee A} \text{(}\forall\text{R)} \\
 \frac{}{A \vee B \vdash B \vee A} \text{(CR)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A} \text{(}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}$$

$$\vdash \neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{B \vdash B} \text{ (I)} \\
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{B \vdash B}{\vdash B, \neg B} \text{ (}\neg\text{L)} \\
 \hline
 A \vdash B, A \wedge \neg B \text{ (}\wedge\text{R)} \\
 \hline
 \neg(A \wedge \neg B), A \vdash B \text{ (}\neg\text{L)} \\
 \hline
 A, \neg(A \wedge \neg B) \vdash B \text{ (EL)} \\
 \hline
 \neg(A \wedge \neg B) \vdash A \rightarrow B \text{ (}\rightarrow\text{R)} \\
 \hline
 \vdash \neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ (}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 \frac{}{B \vdash B} \text{(I)} \\
 \frac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash} \text{(\neg L)} \\
 \frac{\neg B, B \vdash}{B, \neg B \vdash} \text{(EL)} \\
 \frac{A \vdash A \quad B, \neg B \vdash}{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash} \text{(\rightarrow L)} \\
 \frac{A \rightarrow B, A, \neg B \vdash}{A, A \rightarrow B, \neg B \vdash} \text{(EL)} \\
 \frac{A, A \rightarrow B, \neg B \vdash}{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash} \text{(EL)} \\
 \frac{A, \neg B, A \rightarrow B \vdash}{A \wedge \neg B, \neg B, A \rightarrow B \vdash} \text{(\wedge L}_1\text{)} \\
 \frac{A \wedge \neg B, \neg B, A \rightarrow B \vdash}{\neg B, A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash} \text{(EL)} \\
 \frac{\neg B, A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash}{A \wedge \neg B, A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash} \text{(\wedge L}_2\text{)} \\
 \frac{A \wedge \neg B, A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash}{A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash} \text{(CL)} \\
 \frac{A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash}{A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)} \text{(\neg R)} \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)} \text{(\rightarrow R)}
 \end{array}$$

# まとめ

- 推論
  - 公理
  - 定理
- LK体系
  - 始式
  - LK推論規則
- 証明
  - 証明図