

論理学

第7回「他の論理体系」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

前回まで

- 命題
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 真理値表
 - トートロジー
- 標準形
 - 論理和標準形
 - 論理積標準形
 - 論理結合子の制限
- 証明
 - 公理と定理
 - LK体系
- 健全性と完全性
 - LK体系は健全かつ完全である

LK体系

- 式 (sequent) を用いる.

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$$

- 意味: A_1, \dots, A_m のすべてを仮定したとき, B_1, \dots, B_n のどれかを導くことができる.
- 公理は始式 (initial sequent) と定数 (\top と \perp) に関するものだけ.

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)}$$

$$\frac{}{\vdash \top} \text{ (}\top\text{)}$$

$$\frac{}{\perp \vdash} \text{ (}\perp\text{)}$$

- 推論規則は2種類に分けられる.
 - 構造に関する推論規則
 - 論理結合子に関する推論規則

LK推論規則

$$\frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{}{\vdash \top} \text{ (T)} \quad \frac{}{\perp \vdash} \text{ (}\perp\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (WL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (WR)} \quad \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (CL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ (CR)}$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{ (EL)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \text{ (ER)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (Cut)}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\wedge\text{L}_1\text{)} \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\wedge\text{L}_2\text{)} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} \text{ (}\wedge\text{R)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{R}_1\text{)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (}\vee\text{R}_2\text{)} \quad \frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (}\vee\text{L)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (}\rightarrow\text{L)} \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} \text{ (}\rightarrow\text{R)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \text{ (}\neg\text{L)} \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \text{ (}\neg\text{R)}$$

自然演繹体系

- 自然演繹体系 (natural deduction)
 - **NK体系**と呼ばれる
 - LK体系と同じくゲンツェンによって作られた
 - LK体系は厳密でよいが、少し厳密すぎる
 - より日常の推論に近い推論体系
 - 構造に関する推論規則は存在しない
 - 論理結合子に関する推論規則のみ
 - それぞれの論理結合子に2種類の推論規則
 - **導入規則** (introduction) と **除去規則** (elimination)
 - LK体系の右と左に対応

∧の除去規則

- $A \wedge B$ は A でありかつ B であることを意味している.
 - $A \wedge B$ があれば A も B も使うことができる

- LK体系での $A \wedge B$ に関する**左の規則**

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_1) \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge L_2)$$

- $A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta$ では $A \wedge B$ の仮定があれば A を仮定してよいことを意味している.

- NK体系での $A \wedge B$ に関する**除去規則**

$$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1) \qquad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$$

- 規則の上の $A \wedge B$ から \wedge が消えているため、「**除去**」規則と呼ばれる.

∧の導入規則

- $A \wedge B$ を示すには A と B であることの両方を示さなくてはならない.
- LK体系での $A \wedge B$ に関する**右の規則**

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \wedge B} (\wedge R)$$

- A と B を示すことができれば, $A \wedge B$ を示すことができる.
- NK体系での $A \wedge B$ に関する**導入規則**

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I)$$

- 規則の下の $A \wedge B$ から \wedge が現れているため, 「**導入**」規則と呼ばれる.

Vの導入規則

- $A \vee B$ を示すには A または B であることを示せばよい.
 - A であれば $A \vee B$ である.
 - B であれば $A \vee B$ である.
- LK体系での $A \vee B$ に関する**右の規則**

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (vR}_1\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \text{ (vR}_2\text{)}$$

- NK体系での $A \vee B$ に関する**導入規則**

$$\frac{A}{A \vee B} \text{ (vI}_1\text{)}$$

$$\frac{B}{A \vee B} \text{ (vI}_2\text{)}$$

Vの除去規則

- $A \vee B$ が分かった時に, C であることを示すには,
 - A であっても C であり,
 - B であっても C である
 ことを示せばよい.
- LK体系での $A \vee B$ に関する**左の規則**

$$\frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \vee B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \text{ (vL)}$$

- NK体系での $A \vee B$ に関する**除去規則**

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]_i \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \text{ (vE)} \quad \left| \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array} \right| \begin{array}{c} A \text{ を仮定して } C \text{ を示す} \\ B \text{ を仮定して } C \text{ を示す} \\ \hline C \text{ である} \end{array}$$

- 規則の隣の i はこの規則で該当する仮定を捨てた(**discharge**)ことを示している.

→の導入・除去規則

- に関するLK規則

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} (\rightarrow L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R)$$

- に関するNK規則

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E) \qquad \frac{[A]_i \quad \vdots \quad B}{A \rightarrow B} i \quad (\rightarrow I)$$

- の除去規則はモーダスポネンス

¬の導入・除去規則

- ¬に関するLK規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg L)$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg R)$$

- ¬に関するNK規則

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} i \quad (\neg I)$$

$$\frac{\neg \neg A}{A} (\neg \neg)$$

- \perp からはなんでも導くことができる.

$$\frac{\perp}{A} (\perp E)$$

自然演繹規則(一覽)

$$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1)$$

$$\frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} (\wedge I)$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]_i \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \quad i \quad (\vee E)$$

$$\frac{A}{A \vee B} (\vee I_1) \quad \frac{B}{A \vee B} (\vee I_2)$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \quad i \quad (\rightarrow I)$$

$$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\neg E)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A]_i \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \quad i \quad (\neg I)$$

$$\frac{\perp}{A} (\perp E)$$

$$\frac{\neg \neg A}{A} (\neg \neg)$$

自然演繹での証明

- 自然演繹での証明
 - 推論規則を組み合わせて、一番下の式が、その証明図
 - **すべての仮定はdischargeされてなくてはならない。**

- 例: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{B, A \vdash A} \text{ (WL)} \\
 \frac{}{A \vdash B \rightarrow A} \text{ (}\rightarrow\text{R)} \\
 \frac{}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)} \text{ (}\rightarrow\text{R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 [A]_1 \quad [B]_2 \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{ (dashed red arrow)} \\
 A \\
 \frac{}{B \rightarrow A} \text{ 2 (}\rightarrow\text{I)} \\
 \frac{}{A \rightarrow (B \rightarrow A)} \text{ 1 (}\rightarrow\text{I)}
 \end{array}$$

証明の例

- $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ を証明しなさい.

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{B \vdash B} \qquad \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 \text{(\wedge L}_2\text{)} \frac{}{A \wedge B \vdash B} \qquad \text{(\wedge L}_1\text{)} \frac{}{A \wedge B \vdash A} \\
 \text{(\wedge R)} \frac{}{A \wedge B \vdash B \wedge A} \\
 \text{(\rightarrow R)} \frac{}{\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 [A \wedge B]_1 \\
 \text{(\wedge E}_2\text{)} \frac{}{B} \qquad \text{(\wedge E}_1\text{)} \frac{}{A} \\
 \text{(\wedge I)} \frac{}{B \wedge A} \\
 \text{1 (\rightarrow I)} \frac{}{A \wedge B \rightarrow B \wedge A}
 \end{array}$$

$[A \wedge B]_1$ は複数を discharge.

証明の例

- $A \vee B \rightarrow B \vee A$ を証明しなさい.

LK証明図

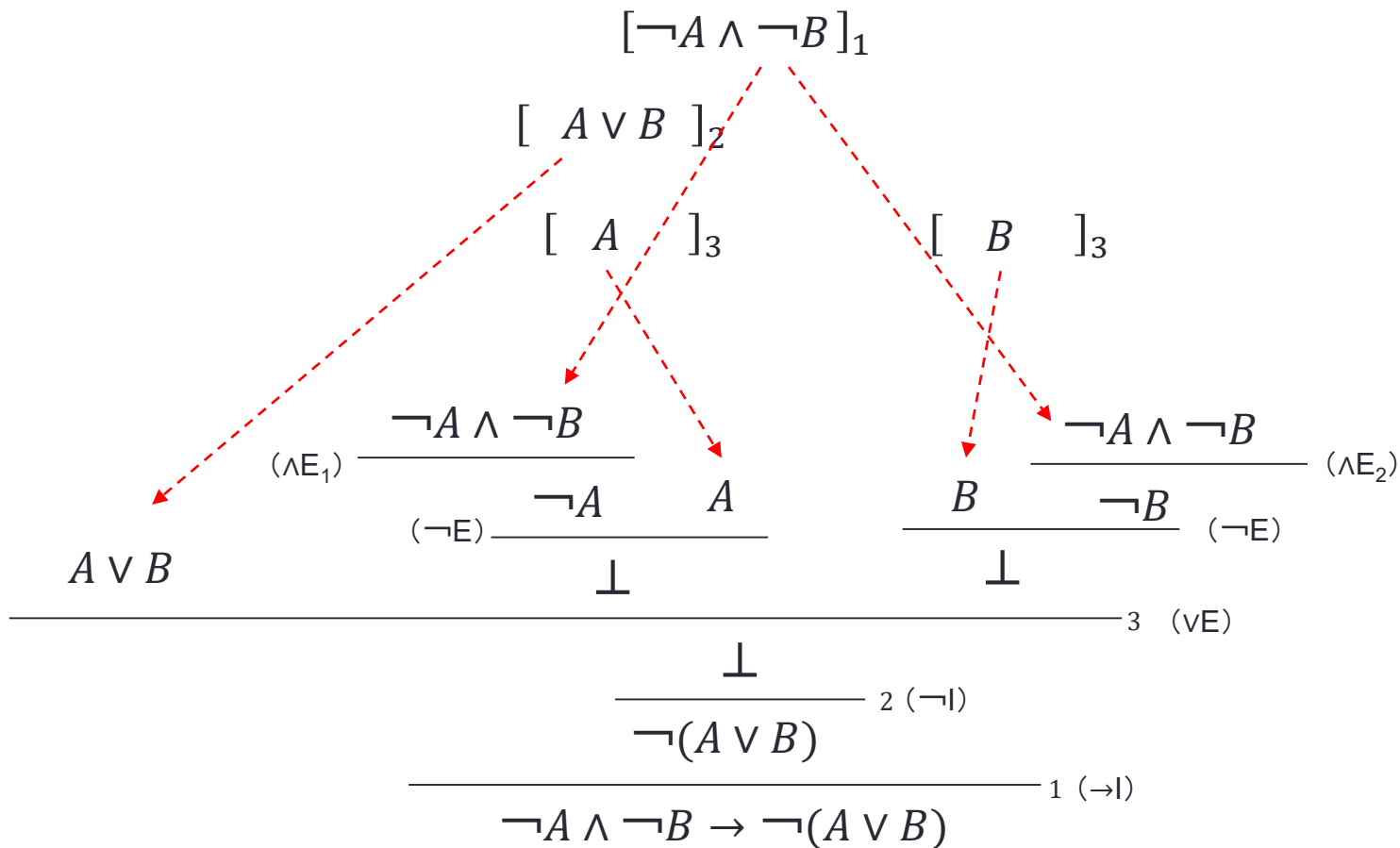
$$\begin{array}{c}
 \text{(I)} \frac{}{B \vdash B} \qquad \frac{}{A \vdash A} \text{(I)} \\
 \text{(vR}_2\text{)} \frac{}{A \vdash B \vee A} \qquad \text{(vR}_1\text{)} \frac{}{B \vdash B \vee A} \\
 \hline
 \text{(vL)} \frac{}{A \vee B \vdash B \vee A} \\
 \hline
 \text{(}\rightarrow\text{R)} \frac{}{\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 [A \vee B]_1 \qquad [A]_2 \qquad [B]_2 \\
 \swarrow \text{red dashed} \quad \searrow \text{red dashed} \quad \searrow \text{red dashed} \\
 A \vee B \qquad \frac{A}{B \vee A} \text{(vI}_2\text{)} \qquad \frac{B}{B \vee A} \text{(vI}_1\text{)} \\
 \hline
 \text{2 (vE)} \frac{}{B \vee A} \\
 \hline
 \text{1 (}\rightarrow\text{I)} \frac{}{A \vee B \rightarrow B \vee A}
 \end{array}$$

練習問題(1)

- $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ を証明しなさい。



宿題(自然演繹)

問題

- 次の論理式をNK(自然演繹)で証明しなさい.
- また, 前回のLKによる証明と比較しなさい.

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

提出

- 注意:
 - LKとNKの証明図を書きなさい.
 - どの推論規則を使ったかが分かるようにしなさい.
 - NKについてはdischargeの関係が分かるように書きなさい.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \rightarrow B]_1}{\dots} \quad \frac{[\neg B]_2}{\dots} \\
 \dots \\
 \frac{\dots}{\neg A} \quad (\neg I) \\
 \frac{\neg A}{\neg B \rightarrow \neg A} \quad 2(\rightarrow I) \\
 \frac{\neg B \rightarrow \neg A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \quad 1(\rightarrow I)
 \end{array}$$

宿題(解答例)

- $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \quad \frac{}{B \vdash B} \text{ (I)} \\
 \hline
 A \rightarrow B, A \vdash B \quad (\rightarrow\text{L}) \\
 \hline
 A, A \rightarrow B \vdash B \quad (\text{EL}) \\
 \hline
 A \rightarrow B \vdash B, \neg A \quad (\neg\text{R}) \\
 \hline
 A \rightarrow B \vdash \neg A, B \quad (\text{ER}) \\
 \hline
 \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A \quad (\neg\text{L}) \\
 \hline
 A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A \quad (\rightarrow\text{R}) \\
 \hline
 \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad (\rightarrow\text{R})
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \rightarrow B]_1 \quad [A]_3}{B} \text{ } (\rightarrow\text{E}) \\
 \hline
 \frac{[\neg B]_2 \quad B}{\perp} \text{ } (\neg\text{E}) \\
 \hline
 \frac{\perp}{\neg A} \text{ } 3(\neg\text{I}) \\
 \hline
 \frac{}{\neg B \rightarrow \neg A} \text{ } 2(\rightarrow\text{I}) \\
 \hline
 \frac{}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} \text{ } 1(\rightarrow\text{I})
 \end{array}$$

二重否定に関する証明

• $A \rightarrow \neg\neg A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash} \text{ (\neg L)} \\
 \frac{}{\neg A, A \vdash} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{A \vdash \neg\neg A} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{\vdash A \rightarrow \neg\neg A} \text{ (\rightarrow R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg A]_2 \quad [A]_1}{\perp} \text{ (\neg E)} \\
 \frac{}{\perp} \text{ (I)} \\
 \frac{}{\neg\neg A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{A \rightarrow \neg\neg A} \text{ (I)}
 \end{array}$$

• $\neg\neg A \rightarrow A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A} \text{ (\neg R)} \\
 \frac{}{\vdash A, \neg A} \text{ (\neg L)} \\
 \frac{}{\neg\neg A \vdash A} \text{ (\neg L)} \\
 \frac{}{\vdash \neg\neg A \rightarrow A} \text{ (\rightarrow R)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{[\neg\neg A]_1} \text{ (\neg\neg)} \\
 \frac{}{A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{\neg\neg A \rightarrow A} \text{ (I)}
 \end{array}$$

排中律の証明

• $A \vee \neg A$ の証明

LK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \text{ (I)} \\
 \frac{}{A \vdash A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_1\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, \neg A} \text{ (}\neg\text{R)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{R}_2\text{)} \\
 \frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ (CR)}
 \end{array}$$

NK証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(A \vee \neg A)]_1 \quad \frac{[A]_2}{A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{I}_1\text{)}}{\perp} \text{ (}\neg\text{E)} \\
 \frac{}{\neg A} \text{ (}\neg\text{I)} \\
 \frac{}{\neg A} \text{ (}\vee\text{I}_2\text{)} \\
 \frac{[\neg(A \vee \neg A)]_1 \quad A \vee \neg A}{\perp} \text{ (}\neg\text{E)} \\
 \frac{}{\neg\neg(A \vee \neg A)} \text{ (}\neg\text{I)} \\
 \frac{}{A \vee \neg A} \text{ (}\neg\neg\text{)}
 \end{array}$$

ヒルベルト論理体系

- LK体系もNK体系もゲンツェンによるもの
- ヒルベルト論理体系
 - 公理中心
 - 推論規則はモーダスポネンスのみ

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (MP)}$$

- 公理

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

A4. $A \wedge B \rightarrow A$

A5. $A \wedge B \rightarrow B$

A6. $A \rightarrow A \vee B$

A7. $B \rightarrow A \vee B$

A8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

A9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

A10. $\neg \neg A \rightarrow A$

ヒルベルト論理体系での証明例

T1. $A \rightarrow A$

[1] $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (\because A2)

[2] $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (\because A1)

[3] $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (\because 1,2,MP)

[4] $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (\because A1)

[5] $A \rightarrow A$ (\because 3,4,MP)

公理

A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$C \equiv A, B \equiv A \rightarrow A$

$B \equiv A \rightarrow A$

$B \equiv A$

T2. $(D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

[1] $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (\because A2)

[2] $[1] \rightarrow (D \rightarrow [1])$ (\because A1)

[3] $D \rightarrow [1]$ (\because 1,2,MP)

[4] $(D \rightarrow [1]) \rightarrow \left(\left((D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \right) \right)$ (\because A2)

[5] $(D \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (D \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (\because 3,4,MP)

ヒルベルト論理体系での証明例

T3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

[1] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (\because T2)

[2] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$ (\because A1)

[3] $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (\because 1,2,MP)

T4. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

[1] $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (\because T3)

[2] $[1] \rightarrow \left(((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \right)$ (\because A2)

[3] $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (\because 1,2,MP)

[4] $[3] \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow [3])$ (\because A1)

[5] $(A \rightarrow B) \rightarrow [3]$ (\because 3,4,MP)

[6] $((A \rightarrow B) \rightarrow [3]) \rightarrow \left(((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow T4 \right)$ (\because A2)

[7] $((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow T4$ (\because 6,7,MP)

[8] $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (\because A1)

[9] $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (\because 7,8,MP)

ヒルベルト論理体系での証明例

T5. $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$

[1] $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ (\because A3)

[2] $[1] \rightarrow (C \rightarrow [1])$ (\because A1)

[3] $C \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ (\because 1,2,MP)

[4] $(C \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)))$ (\because A2)

[5] $(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ (\because 3,4,MP)

[6] $(C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$ (\because A2)

[7] $[6] \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow [6])$ (\because A1)

[8] $(C \rightarrow A) \rightarrow [6]$ (\because 6,7,MP)

[9] $((C \rightarrow A) \rightarrow [6]) \rightarrow (((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow T5)$ (\because A2)

[10] $((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))) \rightarrow T5$ (\because 8,9,MP)

[11] $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B))$ (\because 5,10,MP)

T6. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

[1] $(A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A))$ (\because T5)

[2] $A \wedge B \rightarrow B$ (\because A5)

[3] $(A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge A)$ (\because 1,2,MP)

[4] $A \wedge B \rightarrow A$ (\because A4)

[5] $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ (\because 3,4,MP)

ラムダ式と自然演繹

- ラムダ計算
 - 計算のモデルの一つ
 - 関数抽象 ($\lambda x.M$) と関数適用 (MN) から構成

- ラムダ式の型

$$\frac{\begin{array}{c} x : A \\ \vdots \\ M : B \end{array}}{\lambda x.M : A \rightarrow B}$$

→ の導入規則

$$\frac{M : A \rightarrow B \quad N : A}{(MN) : B}$$

→ の除去規則

- ラムダ式の型の決定と、自然演繹で証明できることが対応

ヒルベルト論理体系とコンビネータ

- コンビネータ
 - 特別なラムダ式
 - $K \equiv \lambda xy. x$
 - $S \equiv \lambda xyz. xz(yz)$
- 定理: 任意のラムダ式に対して, $\alpha\beta$ 変換同値なSK式が存在する.
- ヒルベルト論理体系の \rightarrow に関する公理は SK 式の型と一致している.
 - $K \equiv \lambda xy. x : (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
 - $S \equiv \lambda xyz. xz(yz) : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- ヒルベルト論理体系の推論規則(モーダスポネンス)は関数適用に対応している.

まとめ

- 論理体系
 - 公理と推論規則
- LK論理体系
 - 式 $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$
 - 始式と定数に関する公理
 - 構造に関する推論規則 (weakening, contraction, exchange, cut)
 - 論理結合子に関する推論規則
- NK論理体系
 - より自然に近い
 - 論理結合子に関する導入規則と除去規則
 - 仮定をdischarge
- ヒルベルト論理体系
 - 推論規則はモーダスポネンスのみ
 - 公理中心
- ラムダ式と論理体系