論理学
第8回「述語論理」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

前回まで

- 命題論理
  - 論理結合子（∧, ∨, →, ¬）
  - 真理値表
  - トートロジー
  - 標準形
  - 公理と証明
  - LK体系とNK体系
  - 健全性と完全性

命題論理の限界

- 命題論理
  - 命題が真か偽かについてのみ考える.
  - 命題が表している対象については考えない.
- ソクラテスの問題（三段論法）
  - （大前提）人間は死ぬ.
  - （小前提）ソクラテスは人間である.
  - （結論）ゆえに，ソクラテスは死ぬ.
- 命題論理で表すことができるか?
  - p =「人間は死ぬ」
  - q =「ソクラテスは人間である」
  - r =「ソクラテスは死ぬ」
  - $p \land q \to r$?

述語論理へ

- 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
- 「もの」の集まり
  - 整数
  - 人間
- 「もの」の集まりを動く変数
  - 対象変数(object variable)
  - $x, y, z, \ldots$
- 「もの」の名前
  - 対象定数(object constant)
  - ソクラテス, ピタゴラス, . . .

述語

- 述語（predicate）
  - 「もの」x が性質 P を持つ: $P(x)$
  - 「もの」x と y の間には関係 R が成り立つ: $R(x, y)$

- $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - 「もの」$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の間に Q が成り立つ.
  - Q は n 変数の述語

- $P(x)$ =「x は人間である」
  - P(ソクラテス) =「ソクラテスは人間である」
  - P(ピタゴラス) =「ピタゴラスは人間である」
  - P(太郎) =「太郎は人間である」

- $R(x, y)$ =「x は y が好き」
  - R(太郎, 花子) =「太郎は花子が好き」
  - R(太郎, 桃子) =「太郎は桃子が好き」
  - R(花子, 太郎) =「花子は太郎が好き」

量化記号

- $P(x)$
  - どの x について P が成り立つのか?
  - すべての x について成り立つのか?
  - ある x について成り立つのか?

- 量化記号(quantifier)
  - $\forall x\ P(x)$
    - 全称記号(universal quantifier)
    - すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ
  - $\exists x\ P(x)$
    - 存在記号(existential quantifier)
    - ある x に対して $P(x)$ が成り立つ
    - $P(x)$ となる x が存在する

- $Q(x)$ =「x は死ぬ」
  - $\forall x\ Q(x)$ =「みんな死ぬ」
  - $\exists x\ Q(x)$ =「だれか死ぬ」,「死ぬものがいる」

述語論理

- 述語論理
  - 命題変数のかわりに述語の利用を認める
  - 論理結合子は4つ: ∧, ∨, →, ￢
  - 量化記号を用いる: $\forall x$, $\exists x$

- ソクラテスの問題: $P(x)$ =「x は人間である」, $Q(x)$ =「x は死ぬ」
  - P(ソクラテス) =「ソクラテスは人間である」
  - $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ =「人間は死ぬ」
  - Q(ソクラテス) =「ソクラテスは死ぬ」

- 数字の問題: $P(x)$ =「x は2より大きな素数である」, $Q(x)$ =「x は奇数である」
  - $P(7)$ =「7は2より大きな素数である」
  - $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ =「2より大きな素数は奇数である」
  - $Q(7)$ =「7は奇数である」

例

- 述語 $S(x)$ と $M(x)$ を次のように定義する.
  - $S(x)$ =「x はSFC の学生である」
  - $M(x)$ =「x は数学が好き」

- 次の論理式は何を意味しているか?
  - $\forall x\, S(x)$ =「 みんなSFCの学生である 」
  - $\exists x\, S(x)$ =「 SFCには学生がいる 」
  - $\forall x\big(S(x) \rightarrow M(x)\big)$ =「 SFCの学生は数学が好きだ 」
  - $\exists x(S(x) \wedge M(x))$ =「 SFCには数学が好きな学生がいる 」
  - $\forall x\big(S(x) \rightarrow \neg M(x)\big)$ =「 SFCの学生は数学がきらいだ 」
  - $\forall x\big(\neg S(x) \rightarrow M(x)\big)$ =「 SFCの学生以外は数学が好きだ 」
  - $\forall x \neg S(x)$ =「 SFCには学生はいない 」
  - $\neg \forall x S(x)$ =「 みんなSFCの学生というわけではない 」
  - $\neg \forall x\big(S(x) \rightarrow M(x)\big)$ =「 SFCの学生だといっても数学が好きなわけではない 」
  - $\forall x \neg\big(S(x) \rightarrow M(x)\big)$ =「 みんなSFCの学生で数学がきらい 」
  - $\exists x \neg S(x)$ =「 SFCの学生でないものもある 」
  - $\neg \exists x S(x)$ =「 SFCには学生はいない 」

例

- 述語 $L(x,y)$ を「x は y が好き」とするとき，次の論理式は何を意味しているか?
  - $\forall x\ L(\text{太郎},x)$ =「 太郎はみんなを好き 」
  - $\exists x\ L(\text{太郎},x)$ =「 太郎には好きな人がいる 」
  - $\forall x\ L(x,\text{太郎})$ =「 みんな太郎を好き 」
  - $\exists x\ L(x,\text{太郎})$ =「 だれかが太郎を好き 」
  - $\forall x \forall y\ L(x,y)$ =「 みんなだれでも好き 」
  - $\exists x \exists y\ L(x,y)$ =「 だれかをだれかが好き 」
  - $\forall x \exists y\ L(x,y)$ =「 みんな好きな人がいる 」
  - $\exists x \forall y\ L(x,y)$ =「 みんなを好きな人がいる 」
  - $\exists y \forall x\ L(x,y)$ =「 みんなから好かれる人がいる 」
  - $\forall x \forall y\ \big(S(x) \rightarrow L(x,y)\big)$ =「 SFCの学生はみんなを好き 」
  - $\forall x \forall y\ \big(S(y) \rightarrow L(x,y)\big)$ =「 SFCの学生はみんなから好かれる 」
  - $\forall x\big(S(x) \rightarrow \forall y\ L(x,y)\big)$ =「 SFCの学生はみんなを好き 」
  - $\forall x\big(\forall y\ L(y,x) \rightarrow S(x)\big)$ =「 みんなから好かれるのはSFCの学生だけ 」

述語論理の言語

- 述語論理で記述するために必要となる記号の集まりを言語（language）という.
  - 言語学の言語とは異なる.
  - 語彙（vocabulary）に近い.

- 述語論理の言語 L は以下のものからなる
  1. 論理結合子: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$
  2. 量化記号: $\forall$, $\exists$
  3. 対象変数: $x, y, z, \ldots$
  4. 対象定数: $c, d, \ldots$
  5. 関数記号: $f, g, \ldots$
  6. 述語記号: $P, Q, \ldots$z

項

- 言語 L の**項**（term）を次のように定義する.
  1. L の対象変数，対象定数は項である.
  2. f を L の m 変数の関数記号としたとき，$t_1, \ldots, t_m$ が項であれば，$f(t_1, \ldots, t_m)$ も項である.

- 例: 自然数の理論
  - 対象定数: $0, 1$ など
  - 関数記号: $s(x)$，$+$，$\times$ など
  - 述語記号: $=, <$ など
  - 項
    - x
    - 0
    - $s(x) + (1 \times s(s(y)))$

論理式

- L 上の論理式(logical formula)を次のように定義する.
  1. P を L の n 変数の述語記号としたとき，$t_1, ..., t_n$ が項であれば，$P(t_1, ..., t_n)$ は論理式である(原始論理式, atomic formula).
  2. A と B が論理式であれば，$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\neg A)$ は論理式である.
  3. A が論理式であり，x が対象変数であれば，$(\forall x\ A)$, $(\exists x\ A)$ は論理式である.

- 例: 自然数の理論
  - $\exists x(x \times z = y) \wedge \forall x(x + z > y - z)$
  - $\forall x \forall y((x + s(y)) = s(x + y))$

束縛変数と自由変数

- 束縛変数 (bound variable)
  - $\exists z(x \times z = y)$ において, $x \times z = y$ の z は $\exists z$ によって束縛されている.
  - 束縛変数は別の変数に置き換えても意味は変わらない.
  - $\exists w(x \times w = y)$

- 束縛されていない変数が自由変数 (free variable)
  - $\exists z(x \times z = y)$ における, x と y は自由変数

- 変数の出現 (occurrence) ごとに束縛変数か自由変数かは異なる
  - $\exists z(x \times z = y) \wedge \exists y(x + x = y)$

自由変数　　束縛変数

閉じた論理式

- 論理式 A が自由変数を一つも含まないとき，A は閉じた（closed）論理式という.
  - $\forall x\big(S(x) \rightarrow \forall y\, L(x,y)\big)$

- 論理式 A の自由変数を $x_1, \ldots, x_n$ としたとき，
  - $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, A$
  - A の閉包（universal closure）と呼ぶ.

- 数学では規則などを書くときに全称記号を省略することが多い.
  - 和の交換法則: $x + y = y + x$
  - 閉包: $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

項の代入

- 論理式 A に現れる変数 x の自由な出現を項 t で置き換えることを，項 t の変数 x への**代入**という.
  - $A[t/x]$

- 例
  - A を $\exists z(x \times z = y)$ とする.
  - $A[w/y]$ は $\exists z(x \times z = w)$
  - $A[x/y]$ は $\exists z(x \times z = x)$
  - $A[(x + w)/x]$ は $\exists z\big((x + w) \times z = y\big)$

- 束縛関係が変わる代入を行なうときには，束縛変数を変更したから代入する.
  - $A[z/y]$ は $\exists z(x \times z = z)$ ではなく $\exists w(x \times w = z)$ とする.
  - 一般に $(\forall x A)[t/x]$ は $\forall u(A[u/x][t/x])$ とすると束縛関係を変えずに代入することができる．ここで u は A および t に現れない変数を選ぶ.

部分論理式

- 命題論理と同じように**部分論理式**を定義する.
  1. A 自身は A の部分論理式である.
  2. A および B の部分論理式は $(A \wedge B)$ の部分論理式である.
  3. A および B の部分論理式は $(A \vee B)$ の部分論理式である.
  4. A および B の部分論理式は $(A \rightarrow B)$ の部分論理式である.
  5. A の部分論理式は $(\neg A)$ の部分論理式である.
  6. t を項としたとき, $A[t/x]$ の部分論理式は $\forall x A$ の部分論理式である.
  7. t を項としたとき, $A[t/x]$ の部分論理式は $\exists x A$ の部分論理式である.

- 量化記号を含む場合には部分論理式は無限にある.
  - $\forall x Q(x)$ の部分論理式は,

    $\forall x Q(x)$, Q(ソクラテス), Q(太郎), Q(母(太郎)), . . .

まとめ

- 述語論理
  - 命題論理の限界
  - 「もの」に関する記述
- 述語論理式
  - 言語
  - 項
  - 論理式
- 量化記号
  - 束縛変数と自由変数
  - 閉じた論理式