

論理学

第9回「述語論理の意味」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

前回まで

- 命題論理
 - 論理結合子 (\wedge , \vee , \rightarrow , \neg)
 - 真理値表
 - トートロジー
 - 標準形
 - 公理と証明
 - LK体系とNK体系
 - 健全性と完全性
- 述語論理
 - 述語論理式 (言語, 項)
 - 量化記号 ($\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$)
 - 束縛変数と自由変数
 - 閉じた論理式

述語論理

- 命題論理から述語論理へ
 - 対象とする「もの」の持つ性質やそれらの間の関係を表すように拡張する.
 - 対象変数と述語
- 述語論理
 - 命題変数のかわりに述語の利用を認める
 - 論理結合子は4 つ: \wedge , \vee , \rightarrow , \neg
 - 量化記号を用いる: $\forall x$, $\exists x$

述語論理で書いてみよう

- 述語 S, M, W, H, T, L を以下のようにする.

- $S(x)$ = 「 x はSFCの学生である. 」
- $M(x)$ = 「 x は男の人である. 」
- $W(x)$ = 「 x は女の人である. 」,
- $H(x)$ = 「 x は格好良い. 」
- $T(x)$ = 「 x は背が高い. 」
- $L(x, y)$ = 「 x は y が好き. 」

- 次の文章を述語論理式として書きなさい.

1. SFCには学生がいる.

$$\exists x S(x)$$

2. SFCの学生はみんな格好良い.

$$\forall x (S(x) \rightarrow H(x))$$

3. SFCの男子学生は格好良い.

$$\forall x (S(x) \wedge M(x) \rightarrow H(x))$$

4. SFCには格好良い男子学生がいる.

$$\exists x (S(x) \wedge M(x) \wedge H(x))$$

5. SFCの女子学生は背が高い.

$$\forall x (S(x) \wedge W(x) \rightarrow T(x))$$

つづき

6. SFCにも背が低い男子学生はいる.

$$\exists x (S(x) \wedge M(x) \wedge \neg H(x))$$

7. SFCの格好良い男子学生は背が高い.

$$\forall x (S(x) \wedge M(x) \wedge H(x) \rightarrow T(x))$$

8. SFCの格好良い男子学生が, いつも背が高いとは限らない.

$$\exists x (S(x) \wedge M(x) \wedge H(x) \wedge \neg T(x))$$

9. SFCの男子学生は背が高いか格好良いかだ.

$$\forall x (S(x) \wedge M(x) \rightarrow T(x) \vee H(x))$$

10. 女子は背が高い男子が好きだ.

$$\forall x \forall y (W(x) \wedge L(x, y) \wedge M(y) \rightarrow T(y))$$

11. SFCの女子学生は背が高く格好良い男子学生が好きだ.

$$\forall x \forall y (S(x) \wedge W(x) \wedge M(y) \wedge L(x, y) \rightarrow T(y) \wedge H(y))$$

12. 男子は背が高ければ女子が好きになる.

$$\forall x \forall y (M(x) \wedge T(x) \wedge W(y) \rightarrow L(y, x))$$

述語論理の意味

- 述語論理式の真偽を考える場合には、対象定数や変数の範囲を決める必要がある

- 対象領域** (domain)

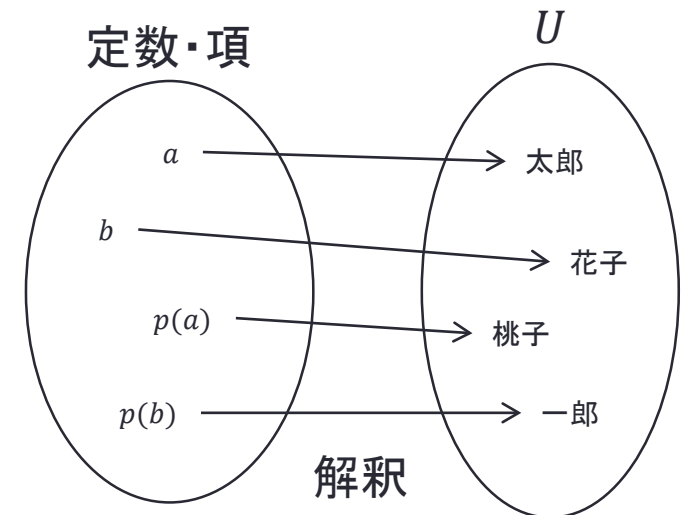
- 対象変数の動く範囲の集合 U

- 解釈** (interpretation)

- 定数には U の特定の要素を対応づける
- 変数は U の値を動く
- 関数記号には U 上の関数を対応づける
- 述語記号には U 上の述語を対応づける

- 構造** (structure)

- 対象領域 U と解釈 σ の対
- $\langle U, \sigma \rangle$



構造

- 言語 L に対する構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ とは,
 1. U は空でない集合 (μ の対象領域という)
 2. σ は L の対象定数, 関数記号, 述語記号を U 上の要素, 関数, 述語に対応させる写像
 - a. c が対象定数のとき, $c^\sigma \in U$
 - b. f が n 変数の関数記号のとき, f^σ は U 上の n 変数の関数: $f^\sigma: U^n \rightarrow U$
 - c. P が n 変数の述語 (等号以外) のとき, P^σ は U 上の n 変数の述語:

$$P^\sigma \subseteq U^n$$
 上記を満たす σ を解釈という

- 言語 $L[\mu]$
 - 言語 L に構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ の対象領域 U の要素を対象定数として追加したもの
 - $u \in U$ に対して, u は $L[\mu]$ の対象定数
 - $u^\sigma = u$

構造の例

- 言語 L

- 対象定数: a, b, c
- 関数記号: f
- 述語記号: $S(x), P(x), L(x, y)$

- 構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$

- $U = \{\text{太郎}, \text{一郎}, \text{花子}, \text{桃子}\}$

- 対象定数

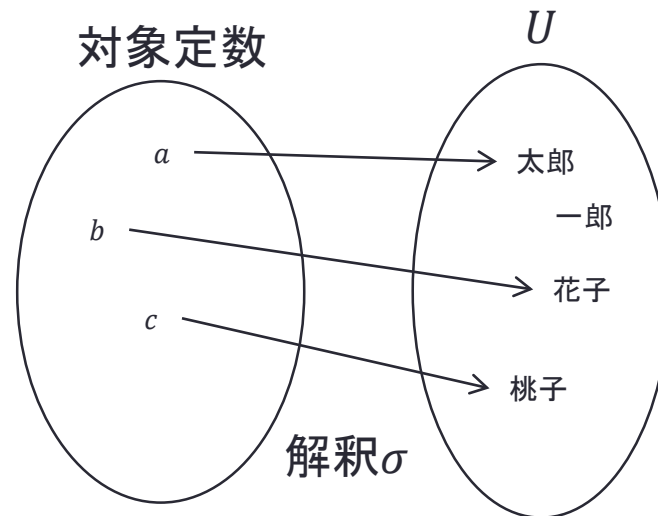
- $a^\sigma = \text{太郎}$
- $b^\sigma = \text{花子}$
- $c^\sigma = \text{桃子}$

- 関数記号

- $f^\sigma(\text{太郎}) = \text{一郎}$
- $f^\sigma(\text{一郎}) = \text{太郎}$
- $f^\sigma(\text{花子}) = \text{桃子}$
- $f^\sigma(\text{桃子}) = \text{花子}$

- 述語記号

- $S^\sigma = \{\text{太郎}, \text{花子}\}$
- $P^\sigma = \{\text{花子}\}$
- $L^\sigma = \{(\text{太郎}, \text{花子}), (\text{桃子}, \text{一郎}), (\text{花子}, \text{太郎})\}$



論理式に対する意味づけ

- 変数を含まない $L[\mu]$ の項 t の構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ における意味づけ μ, t^μ , を次のように定義する.

- t が対象定数 c のとき, $t^\mu = c^\sigma$
- t が $f(t_1, \dots, t_n)$ の形するとき, $t^\mu = f^\sigma(t_1^\mu, \dots, t_n^\mu)$

- $L[\mu]$ の閉じた論理式 A に対して, A が構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ で成り立つことを $\mu \models A$ と表す. 成り立たない場合には, $\mu \not\models A$ と表す.

- $\mu \models P(t_1, \dots, t_n) \iff (t_1^\mu, \dots, t_n^\mu) \in P^\sigma$
等号の場合には, $\mu \models t_1 = t_2 \iff t_1^\mu = t_2^\mu$
- $\mu \models A \wedge B \iff \mu \models A$ かつ $\mu \models B$
- $\mu \models A \vee B \iff \mu \models A$ または $\mu \models B$
- $\mu \models A \rightarrow B \iff \mu \not\models A$ または $\mu \models B$
- $\mu \models \neg A \iff \mu \not\models A$
- $\mu \models \forall x A \iff$ すべての $u \in U$ に対して $\mu \models A[u/x]$
- $\mu \models \exists x A \iff$ ある $u \in U$ に対して $\mu \models A[u/x]$

- A が閉じていない場合には, A の閉包 A^* に対して
 - $\mu \models A \iff \mu \models A^*$

意味付けの例

• 項

- $f(a)^\mu = f^\sigma(a^\mu) = f^\sigma(a^\sigma) = f^\sigma(\text{太郎}) = \text{一郎}$
- $f(f(b))^\mu = f^\sigma(f^\sigma(b^\sigma)) = f^\sigma(f^\sigma(\text{花子})) = f^\sigma(\text{桃子}) = \text{花子}$

• 論理式

- $\mu \models S(a) \iff a^\mu \in S^\sigma \iff \text{太郎} \in \{\text{太郎}, \text{花子}\}$
- $\mu \models L(a, f(c)) \iff (a^\mu, f(c)^\mu) \in L^\sigma \iff (a^\sigma, f^\sigma(c^\sigma)) \in L^\sigma$
 $\iff (\text{太郎}, f(\text{桃子})) \in L^\sigma$
 $\iff (\text{太郎}, \text{花子}) \in \{(\text{太郎}, \text{花子}), (\text{桃子}, \text{一郎}), (\text{花子}, \text{太郎})\}$
- $\mu \models \forall x(P(x) \rightarrow S(x)) \iff$
 すべての $u \in U$ に対して, $\mu \models P(u) \rightarrow S(u)$
- $\mu \models \forall x(S(x) \rightarrow \exists y L(x, y)) \iff$
 すべての $u \in U$ に対して, ある $v \in U$ があり, $\mu \models S(u) \rightarrow L(u, v)$

恒真な論理式

- A は**恒真**である (valid)
 - 任意の構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ に対して $\mu \models A$

恒真な論理式

(A は x を自由変数として含まず. y は B に現れない変数とする)

1. $\forall x A \equiv A$, $\exists x A \equiv A$
2. $\forall x B \equiv \forall y B[y/x]$, $\exists x B \equiv \exists y B[y/x]$
3. $A \wedge \forall x B \equiv \forall x(A \wedge B)$, $A \wedge \exists x B \equiv \exists x(A \wedge B)$
4. $A \vee \forall x B \equiv \forall x(A \vee B)$, $A \vee \exists x B \equiv \exists x(A \vee B)$
5. $\forall x B \wedge \forall x C \equiv \forall x(B \wedge C)$, $\exists x B \vee \exists x C \equiv \exists x(B \vee C)$
6. $\forall x B \vee \forall x C \rightarrow \forall x(B \vee C)$, $\exists x(B \wedge C) \rightarrow \exists x B \wedge \exists x C$
7. $\forall x \forall y D \equiv \forall y \forall x D$, $\exists x \exists y D \equiv \exists y \exists x D$
8. $\exists x \forall y D \rightarrow \forall y \exists x D$
9. $\forall x B \rightarrow \exists x B$
10. $\neg \forall x B \equiv \exists x \neg B$, $\neg \exists x B \equiv \forall x \neg B$
11. $A \rightarrow \forall x B \equiv \forall x(A \rightarrow B)$, $A \rightarrow \exists x B \equiv \exists x(A \rightarrow B)$
12. $\forall x B \rightarrow A \equiv \exists x(B \rightarrow A)$, $\exists x B \rightarrow A \equiv \forall x(B \rightarrow A)$
13. $\exists x(B \rightarrow C) \equiv \forall x B \rightarrow \exists x C$
14. $\forall x(B \rightarrow C) \rightarrow (\forall x B \rightarrow \forall x C)$
15. $\forall x(B \rightarrow C) \rightarrow (\exists x B \rightarrow \exists x C)$

$$A \equiv B$$



$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$



$$\mu \models A \iff \mu \models B$$

• 注意: 次の論理式は恒真ではない.

- $\forall x(B \vee C) \rightarrow \forall x B \vee \forall x C$
- $\exists x B \wedge \exists x C \rightarrow \exists x(B \wedge C)$
- $\exists x B \rightarrow \forall x B$
- $\forall x \exists y D \rightarrow \exists y \forall x D$

恒真とそうでない例

- $S(x) = 「x は学生である」$, $T(x) = 「x は教員である」$
 - $\exists x (S(x) \wedge T(x)) \rightarrow \exists x S(x) \wedge \exists x T(x)$
日本語「学生かつ教員である人がいれば、学生も存在するし、教員も存在する。」
 - × $\exists x S(x) \wedge \exists x T(x) \rightarrow \exists x (S(x) \wedge T(x))$
日本語「学生も存在し、教員も存在するなら、学生かつ教員である人も存在する。」
- $M(x) = 「x は男である」$, $F(x) = 「x は女である」$
 - $\forall x M(x) \vee \forall x F(x) \rightarrow \forall x (M(x) \vee F(x))$
日本語「すべてが男であるかすべてが女であれば、すべては男か女である。」
 - × $\forall x (M(x) \vee F(x)) \rightarrow \forall x M(x) \vee \forall x F(x)$
日本語「すべてが男か女であれば、すべては男であるかすべては女であるかのどちらかである。」
- $L(x, y) = 「x は y が好き」$
 - $\exists x \forall y L(x, y) \rightarrow \forall y \exists x L(x, y)$
日本語「みんなを好きな人がいれば、みんなにはその人を好きな人がいる。」
 - × $\forall x \exists y L(x, y) \rightarrow \exists y \forall x L(x, y)$
日本語「みんなに好きな人がいれば、みんなから好かれる人がいる。」

恒真と充足可能

- 充足可能

- A の自由変数を x_1, \dots, x_n としたとき, A が充足可能であるとは
 - ある構造 $\mu = \langle U, \sigma \rangle$ と, ある要素 u_1, \dots, u_n に対して $\mu \models A[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$

- A が充足不可能であるための必要十分条件は $\neg A$ が恒真であること

冠頭標準形

- 冠頭論理式 (prenex formula)

- Q_1, \dots, Q_n を \forall あるいは \exists のいずれかとし, A を量化記号を一つも含まない論理式とすると

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n A$$

を冠頭論理式という

- $A \sim B$

- $A \equiv B$ が恒真のとき, A と B は論理的に同値であると言い, $A \sim B$ と表す.
 - \sim は同値関係になる.

- 定理:** 任意の論理式 A に対し, ある冠頭論理式 A^+ が存在して, $A \sim A^+$ が成り立つ.

- 論理式 A に対して $A \sim A^+$ となる冠頭論理式 A^+ を A の冠頭標準形 (prenex normal form) という.

- 冠頭標準形は一意的に定まるとは限らない.

例

• 次の論理式と論理的に同値な冠頭論理式を求めなさい。

$$1. (\exists y P(y) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x R(x)$$

$$\sim \exists y (P(y) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x R(x)$$

$$\sim \forall y (P(y) \vee Q(x) \rightarrow \exists x R(x))$$

$$\sim \forall y \exists z (P(y) \vee Q(x) \rightarrow R(z))$$

$$A \vee \exists x B \equiv \exists x (A \vee B)$$

$$\exists x B \rightarrow A \equiv \forall x (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow \forall x B \equiv \forall x (A \rightarrow B)$$

$$2. \exists x R(x, y) \rightarrow \forall y (P(y) \wedge \neg \forall z Q(z))$$

$$\sim \exists x R(x, y) \rightarrow \forall y (P(y) \wedge \exists z \neg Q(z))$$

$$\sim \exists x R(x, y) \rightarrow \forall y \exists z (P(y) \wedge \neg Q(z))$$

$$\sim \forall x \forall u \exists z (R(x, y) \rightarrow P(u) \wedge \neg Q(z))$$

$$\neg \forall x B \equiv \exists x \neg B$$

$$A \wedge \exists x B \equiv \exists x (A \wedge B)$$

$$3. \exists x \left(\forall y (P(y) \rightarrow Q(x, z)) \vee \exists z (\neg \exists u R(z, u) \wedge Q(x, z)) \right)$$

$$\sim \exists x \left(\forall y (P(y) \rightarrow Q(x, z)) \vee \exists v (\neg \exists u R(v, u) \wedge Q(x, v)) \right)$$

$$\sim \exists x \forall y \exists v \forall u \left((P(y) \rightarrow Q(x, z)) \vee (\neg R(v, u) \wedge Q(x, v)) \right)$$

まとめ

- 述語論理の意味
 - 対象領域
 - 解釈
 - 構造 = 対象領域 + 構造
- $\mu \models A$
- 恒真な論理式
 - 充足可能
- 冠頭標準形