情報数学
第10回　圏論とデータ型

萩野　達也

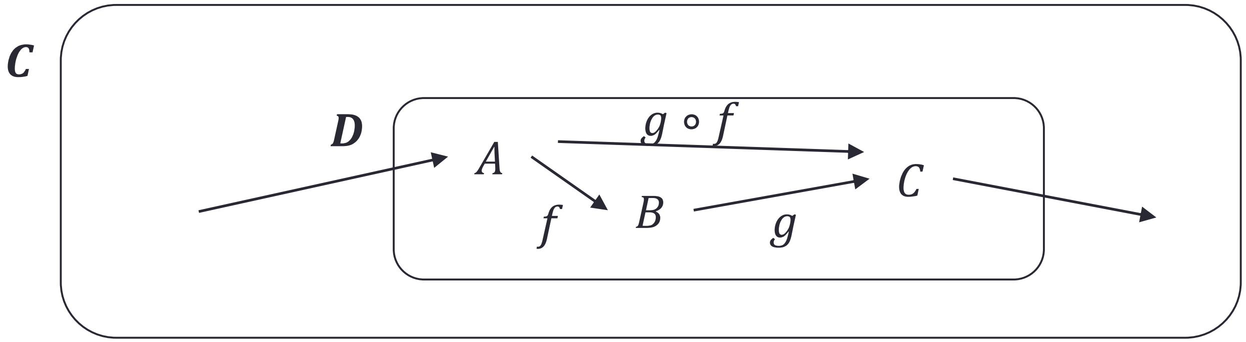
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

部分圏

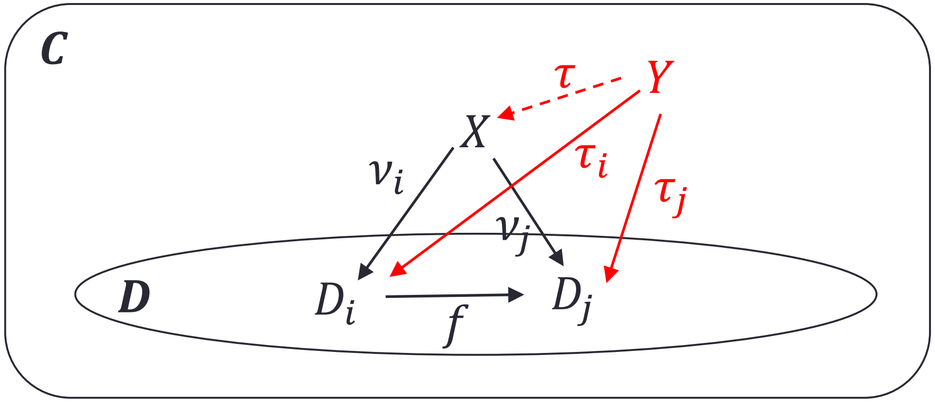
- 圏 $\boldsymbol{C}$ の対象と射の集まり $\boldsymbol{D}$ は次の条件を満たすとき，部分圏という.
  - $f \in \boldsymbol{D}$ で $f: A \to B$ ならば，$A, B \in \boldsymbol{D}$
  - $A \in \boldsymbol{D}$ ならば $1_A \in \boldsymbol{D}$
  - $f, g \in \boldsymbol{D}$ ならば $g \circ f \in \boldsymbol{D}$



- 部分圏 $\boldsymbol{D}$ はそれだけを見れば圏である.
- これまでに書いた図式はほとんどは部分圏である.

極限(limit)

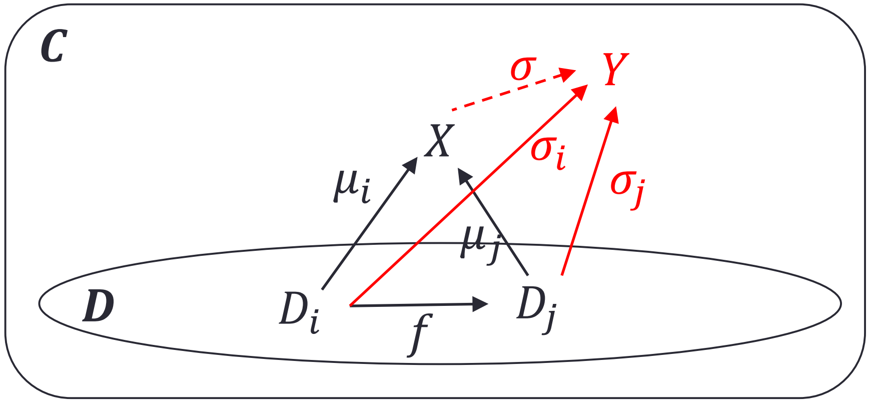
- 圏 $\boldsymbol{C}$ の部分圏 $\boldsymbol{D}$ の極限(limit)とは，次の条件を満たす $\boldsymbol{C}$ の対象 X である.
  - X から $\boldsymbol{D}$ のすべての対象 D_i に対して射 $\nu_i: X \to D_i$ が存在する.
  - $f \in D$ で $f: D_i \to D_j$ ならば $f \circ \nu_i = \nu_j$
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 Y と，Y から $\boldsymbol{D}$ の対象 D_i への射 $\tau_i: Y \to D_i$ で，$f \in D$，$f: D_i \to D_j$ に対して $f \circ \tau_i = \tau_j$ であれば，$\tau: Y \to X$ で $\tau_i = \nu_i \circ \tau$ となるような τ が唯一存在する.



- $\boldsymbol{D}$ の極限 X を $\lim_{\leftarrow} \boldsymbol{D}$ と書く.

余極限(colimit)

- 圏 $\boldsymbol{C}$ の部分圏 $\boldsymbol{D}$ の余極限(colimit)とは，次の条件を満たす $\boldsymbol{C}$ の対象 X である.
  - X から $\boldsymbol{D}$ のすべての対象 D_i に対して射 $\mu_i\colon D_i \to X$ が存在する.
  - $f \in D$ で $f\colon D_i \to D_j$ ならば $\mu_j \circ f = \mu_i$
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 Y と，Y から $\boldsymbol{D}$ の対象 D_i からの射 $\sigma_i\colon D_i \to Y$ で，$f \in D$, $f\colon D_i \to D_j$ に対して $\sigma_j \circ f = \tau_i$ であれば，$\sigma\colon X \to Y$ で $\sigma_i = \sigma \circ \mu_i$ となるような σ が唯一存在する.



- $\boldsymbol{D}$ の余極限 X を $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書く.

帰納的極限と射影的極限

- 帰納的極限（inductive limit）
    - 次の図式の余極限（colimit）

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r] \arrow[drrrr] & D_1 \arrow[r] \arrow[drrr] & D_2 \arrow[r] \arrow[drr] & D_3 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[d] \\ &&&& \varinjlim D_i \end{tikzcd}$$

- 射影的極限（projective limit）
    - 次の図式の極限（limit）

$$\begin{tikzcd} D_0 & D_1 \arrow[l] & D_2 \arrow[l] & D_3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\ &&&& \varprojlim D_i \arrow[ullll] \arrow[ulll] \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

すべては極限と余極限

- 積と和

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "!h"'] \arrow[ur, "g"'] \arrow[ul, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] \arrow[ur, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "!h"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}
$$

極限

D

A B

余極限

- 終対象と始対象

$$A \overset{!}{\dashrightarrow} F$$

終対象

極限

D

余極限

$$I \overset{!}{\dashrightarrow} A$$

始対象

その他の極限と余極限

- equalizer と co-equalizer

equalizer

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

$$f \circ e = g \circ e$$

極限

$$\boldsymbol{D} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

余極限

co-equalizer

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr] & C \arrow[d, dashed, "!"] \arrow[d, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] \\ & & D \end{tikzcd}$$

$$c \circ f = c \circ g$$

- pullback と pushout

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

極限

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & D \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[d] \\ & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

pullback

$$\begin{tikzcd} & A \\ B & C \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

余極限

$$\begin{tikzcd} X & & \\ & D \arrow[ul, dashed, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\ & B \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & C \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pushout

関手（Functor）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f\colon A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f)\colon F(A) \to F(B) \in \boldsymbol{D}$

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C} & & \boldsymbol{D} \\ \boxed{A \xrightarrow{f} B} & \xrightarrow{F} & \boxed{F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)} \end{array}$$

  - $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(1_A) = 1_{F(A)}$
  - $f\colon A \to B,\ g\colon B \to C \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, shift left, "F(1_A)"] \arrow[r, shift right, "1_{F(A)}"'] & F(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g \circ f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & F(C) \end{tikzcd}$$

関手（例）

- 忘却関手（forgetful functor）
  - 構造を忘れる関手
  - $G: \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$
    - $G\left((S, \cdot, e, {}^{-1})\right) = S$
    - $G(f) = f$

- 自由関手（free functor）
  - 構造を与える関手
  - $F: \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Grp}$
    - $F(S) = S$から生成された自由群
    - $F(f) = f$を群の準同型に自然に拡張

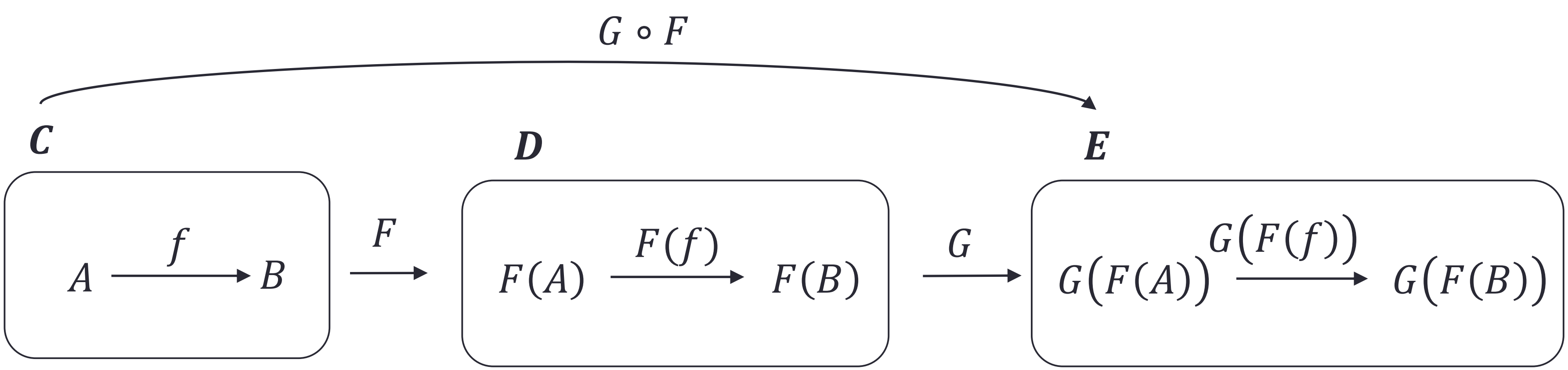
- 半群間の関手
  - $F: (M, \cdot, e) \to (N, \cdot, e)$
  - $F(e) = e$
  - $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$
  - 半群関の準同型

- 半順序集合間の関手
  - $F: (D, \sqsubseteq) \to (E, \sqsubseteq)$
  - $x \sqsubseteq y$ ならば $F(x) \sqsubseteq F(y)$
  - 単調な関数

関手の合成

- 関手の合成
  - 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - 圏 $\boldsymbol{D}$ から 圏 $\boldsymbol{E}$ への関手 $G\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{E}$

- $G \circ F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{E}$
  - $G \circ F(A) = G\big(F(A)\big)$
  - $G \circ F(f) = G\big(F(f)\big)$



自然変換（natural transformation）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への2つの関手 $F, G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ に対して $\tau\colon F \overset{\cdot}{\to} G$ が自然変換であるとは：
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{D}$ の射 $\tau_A\colon F(A) \to G(A)$ が存在する．
  - 射 $f\colon A \to B \in C$ に対して，$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$ が成り立つ．

$$
\boldsymbol{C}:\
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\tau\,\downarrow\,\cdot"] & {} \\
{} \arrow[r, "G"'] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\boldsymbol{D}:\
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(B) \arrow[d, "\tau_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

- 圏 $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$
  - 対象：圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手
  - 射：関手間の自然変換

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\tau\,\downarrow\,\cdot"'] \arrow[dd, bend left=60, "\sigma\circ\tau"] \\
G \arrow[d, "\sigma\,\downarrow\,\cdot"'] \\
H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(B) \arrow[d, "\tau_B"'] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\sigma_A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(B) \arrow[d, "\sigma_B"'] \\
H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B)
\end{tikzcd}
$$

共変関手と反変関手

- 共変関手（covariant functor）
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f: A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f): F(A) \to F(B) \in \boldsymbol{D}$

$\boldsymbol{C}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{D}$

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \xrightarrow{F} \qquad F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

- 反変関手（contravariant functor）
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f: A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f): F(B) \to F(A) \in \boldsymbol{D}$

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

$\boldsymbol{C}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{D}$

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \xrightarrow{F} \qquad F(A) \xleftarrow{F(f)} F(B)$$

圏の積

- 圏 $\boldsymbol{C}$ と 圏 $\boldsymbol{D}$ の積の圏 $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$
  - 対象: $A \in \boldsymbol{C}, B \in \boldsymbol{D}$ に対して, $(A, B) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$
  - 射: $f: A \to A' \in \boldsymbol{C}, g: B \to B' \in \boldsymbol{D}$ に対して, $(f, g): (A, B) \to (A', B') \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$

$\boldsymbol{C}$

$$A \xrightarrow{f} A'$$

$\boldsymbol{D}$

$$B \xrightarrow{g} B'$$

$\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$

$$(A, B) \xrightarrow{(f, g)} (A', B')$$

Hom関手

- 圏 $\boldsymbol{C}$ に対して，その射の集合を対応させる関手
- $\hom_{\boldsymbol{C}}(-,-): \boldsymbol{C}^{op} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Set}$
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(A,B)$: A から B への射の集合
  - $f: A' \to A$ と $g: B \to B'$ に対して，$\hom_{\boldsymbol{C}}(f,g): \hom_{\boldsymbol{C}}(A,B) \to \hom_{\boldsymbol{C}}(A',B')$ を $\hom_{\boldsymbol{C}}(f,g)(h) = g \circ h \circ f$ で定義する.

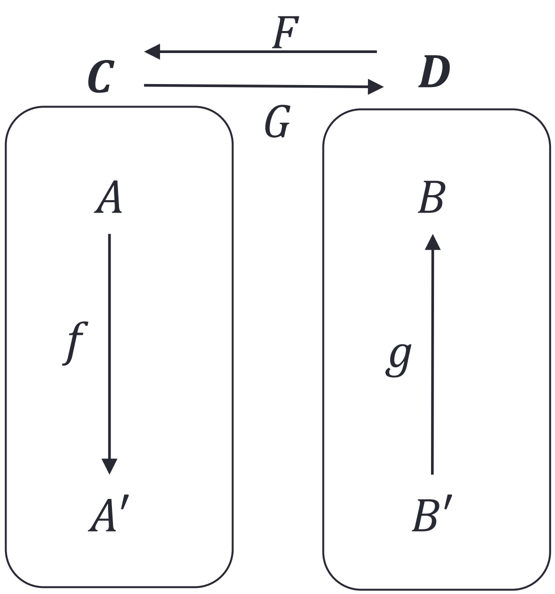
$$\begin{array}{ccc} \hom_{\boldsymbol{C}}(A,B) & \xrightarrow{\hom_{\boldsymbol{C}}(f,g)} & \hom_{\boldsymbol{C}}(A',B') \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ h: A \to B & & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"'] & B' \\ A \arrow[r, "h"'] & B \arrow[from=u, "g"] \end{tikzcd}$$

随伴（adjunction）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ の随伴（adjunction）
  - 左随伴関手（left adjoint functor） $F: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$
  - 右随伴関手（right adjoint functor） $G: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(F(B), A) \cong \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B, G(A)\big)$ が $A \in \boldsymbol{C}$ と $B \in \boldsymbol{D}$ に対して自然な同型となっている.
  - $F \dashv G$ と書かれる

$$\hom_{\boldsymbol{C}}(F(-), -) \simeq \hom_{\boldsymbol{D}}\big(-, G(-)\big) : \boldsymbol{D}^{op} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Set}$$



$$\begin{tikzcd}
\hom_{\boldsymbol{C}}(F(B), A) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\hom_C(F(g), f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B, G(A)\big) \arrow[d, "\hom_D(g, G(f))"] \\
\hom_{\boldsymbol{C}}(F(B'), A') \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B', G(A')\big)
\end{tikzcd}$$

すべては随伴

- $\Delta\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ を $\Delta(A) = (A, A)$ とする対角線関手とすると
  - $+ \dashv \Delta \dashv \times$
  - 直和は Δ の左随伴関手
  - 直積は Δ の右随伴関手
- $!\colon \boldsymbol{C} \to \cdot$ を $!(A) = \cdot$ とする関手とすると
  - 始対象は ! の左随伴関手
  - 終対象は ! の右随伴関手
  - ここで，$\cdot$ は対象が1つ，射が恒等射だけの圏
- $\boldsymbol{D}$ を 圏 $\boldsymbol{C}$ の部分圏としたとき，$\Delta\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{D}}$ を $\Delta(A)(B) = (A)$, $\Delta(A)(f) = 1_A$ とする関手とすると
  - 余極限 $\varinjlim \boldsymbol{D}$ は Δ の左随伴関手
  - 極限 $\varprojlim \boldsymbol{D}$ は Δ の右随伴関手
- $(-) \times A\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ の右随伴関手 $(-)^A\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ が関数空間
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(C \times A, B) \simeq \hom_{\boldsymbol{C}}(C, B^A)$

$$
\begin{tikzcd}
B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev"] & B \\
C \arrow[u, dashed, "curry(f)"] & C \times A \arrow[u, dashed, "curry(f) \times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

モナド（Monad）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ 上のモナドは関手 $T: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ と2つの自然変換 $\eta: 1_{\boldsymbol{C}} \dot{\to} T$ と $\mu: T^2 \dot{\to} T$ からなり，次の条件をみたす：
  - $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
  - $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T\left(T\left(T(A)\right)\right) \arrow[r, "T(\mu_A)"] \arrow[d, "\mu_{T(A)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T\left(T(A)\right) \arrow[d, "\mu_A"] \\
T\left(T(A)\right) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A)
\end{tikzcd}
$$

半群の結合法則

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\eta_A)"'] \arrow[dr, equal] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"'] & T\left(T(A)\right) \arrow[d, "\mu_A"] \\
T\left(T(A)\right) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A)
\end{tikzcd}
$$

半群の単位元の存在

- $F \dashv G$ のとき $T = G \circ F$ はモナドである.

Haskellのモナド

```
class Monad m where
  (>>=)   :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
```

- Monad クラスのインスタンスがモナド
  - 2つの関数を実装する必要がある.
  - (>>=) は**バインド**(bind)と呼ばれる

- 2つの関数は次の規則を満たしている必要がある.
  - **モナド則**

```
1. (return x) >>= f    = f x
2. m >>= return        = m
3. (m >>= f) >>= g     = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

Haskellのモナドと圏のモナドの対応

```
class Monad m where
   (>>=)   :: m a -> (a -> m b) -> m b
   return :: a -> m a
```

```
1. (return x) >>= f    = f x
2. m >>= return        = m
3. (m >>= f) >>= g     = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

圏 $\boldsymbol{C}$ 上のモナドは関手 $T\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ と2つの自然変換 $\eta\colon 1_{\boldsymbol{C}} \overset{\cdot}{\to} T$ と $\mu\colon T^2 \overset{\cdot}{\to} T$ からなり，次の条件をみたす：

- $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
- $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, "T\eta"'] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
$$

- **`return::a -> m a`** は
  - $\eta_A\colon A \to T(A)$
- **`(>>=):: m a -> (a -> m b) -> m b`** は
  - $f\colon A \to T(B)$ が与えられたとき $T(f)\colon T(A) \to T\big(T(B)\big)$ となるので $\mu_B\colon T\big(T(B)\big) \to T(B)$ と組み合わせた $\mu_B \circ T(f)\colon T(A) \to T(B)$ を対応させるもの．
  - $\big(A \to T(B)\big) \to \big(T(A) \to T(B)\big) \equiv T(A) \to \big(A \to T(B)\big) \to T(B)$

自然数対象(Natural Number Object)

- N が自然数対象(Natural Number Object)であるとは
  - 2つの射がある
    - $0: 1 \to N$
    - $s: N \to N$
  - $f: 1 \to A, g: A \to A$ に対して，$h: N \to A$ が唯一存在し
    - $h \circ 0 = f$
    - $h \circ s = g \circ h$

  となる.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & A \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

足し算の射の構成

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "pr(f,g)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, dashed, "pr(f,g)"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}
$$

- $add\colon N \times N \to N$ の定義
  - カリー化した $add'\colon N \to N^N$ を pr を使って構成する.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "curry(\pi_2)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "add'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, dashed, "add'"] \\
& N^N \arrow[r, "curry(s \circ ev)"'] & N^N
\end{tikzcd}
$$

  - $\pi_2\colon 1 \times N \to N$ カリー化すると $curry(\pi_2)\colon 1 \to N^N$
  - $s \circ ev\colon N^N \times N \to N$ をカリー化すると $curry(s \circ ev)\colon N^N \to N^N$
  - $add' = pr\big(curry(\pi_2), curry(s \circ ev)\big)$

$$
\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "add'"'] & N^N & & \\
N \times N \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[rrr, dashed, "pair"'] \arrow[drr, "\pi_2"'] & & & N^N \times N \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[r, "ev"] & N \\
& & N & &
\end{tikzcd}
$$

  - $add = ev \circ pair\big(pr\big(curry(\pi_2), curry(s \circ ev)\big) \circ \pi_1, \pi_2\big)$

宿題

- 掛け算の射 $mult: N \times N \to N$ を add と同じように構成しなさい.
  1. カリー化した $mult': N \to N^N$ を pr および add を使って構成する.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "?"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "mult'"] & N \arrow[d, dashed, "mult'"] \\
& N^N \arrow[r, "?"'] & N^N
\end{tikzcd}$$

  2. $mult' = pr(\dots, \dots)$
     - 0 に対しては，常に 0 を与える射 $1 \times N \to N$ を考え，カリー化して $1 \to N^N$
     - s に対しては，$N^N \times N$ の第2引数をこれまでの結果(ev)に add する射 $N^N \times N \to N$ をカリー化して $N^N \to N^N$
  3. $mult': N \to N^N$ を使って $mult: N \times N \to N$ を定義する.

- 提出方法
  - SOLの課題提出から，PDF形式で提出しなさい.
  - 導出の道順が分かるように書いてください.
  - 締め切り：12月31日木曜日

まとめ

- 極限と余極限
  - 直積と直和
  - 帰納的極限と射影的極限
- 関手
- 随伴
  - 右随伴関手と左随伴関手
  - 対角線関手と直積と直和
  - 極限と随伴
  - モナド
- 自然数対象

最終課題

- この授業では,
  - 第2回～第3回　帰納的関数
  - 第4回～第5回　チューリング機械
  - 第6回～第7回　ラムダ計算
  - 第8回～第9回　完全半順序
  - 第10回～第11回　圏論

  の5つのテーマについて取り扱ってきました.
- 5つのどれかのテーマについて
  - そのテーマを選んだ理由
  - そのテーマの内容を講義を聞いていない人でも分かるように自分なりにまとめた説明
  - そのテーマを勉強すべきであることを後輩などに推薦する理由

  をA4(11pt)で1～5枚程度で書いてください.
- 提出方法
  - SOLの課題提出から, PDF形式で提出しなさい.
  - 締め切り:1月5日火曜日
  - 授業資料以外を参照した場合には, 必ず参考文献や人名などを書くこと.