情報数学
第7回　ラムダ計算と計算可能性

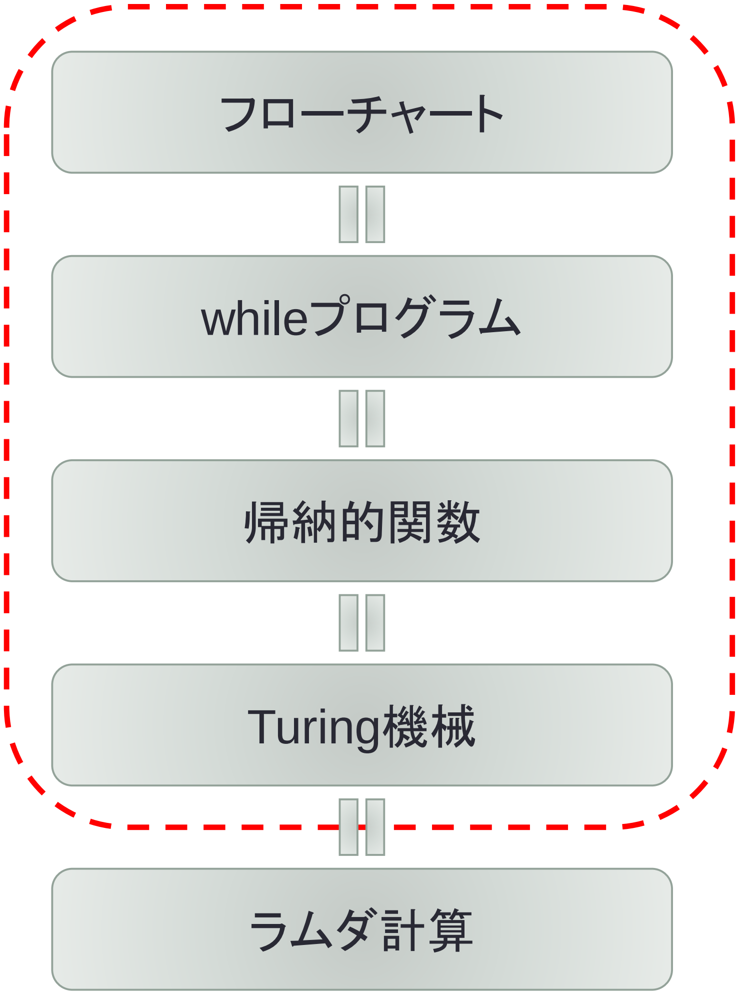
萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

これまで

- 計算
  - フローチャート
  - whileプログラム
  - 帰納的関数
    - 原始帰納的関数
    - 最小解演算子
  - Turing機械
    - 決定不可能問題
  - ラムダ計算
    - 関数抽象
    - 関数適用



λ表現

- 部分関数 $f: N^n \to N$ の**λ表現** F とは:
  - もし $f(k_1, k_2, \dots, k_n) = k$ であれば,

$$F\lceil k_1 \rceil \lceil k_2 \rceil \dots \lceil k_n \rceil \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil k \rceil$$

ここで $\lceil k_i \rceil$ は，自然数 k_i のλ表現（次に定義）

- $\lceil f \rceil \equiv F$ を f のλ表現と呼ぶ.

真偽と対のλ表現

- 真と偽のλ表現:
  - $[\mathrm{true}] \equiv \lambda x\ y.x$
  - $[\mathrm{false}] \equiv \lambda x\ y.y$
  - $[\mathrm{true}]M\ N \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
  - $[\mathrm{false}]M\ N \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
- 2つの式の対のλ表現:
  - $[M,N] \equiv \lambda x.x\ M\ N$
  - $\pi_1 \equiv \lambda x.x[\mathrm{true}]$
  - $\pi_2 \equiv \lambda x.x[\mathrm{false}]$
  - $\pi_1[M,N] \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
  - $\pi_2[M,N] \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$

自然数のλ表現

- 自然数のλ表現:
  - $\lceil 0 \rceil \equiv \lambda x\ y.\, y$
  - $\lceil 1 \rceil \equiv \lambda x\ y.\, x\ y$
  - $\lceil 2 \rceil \equiv \lambda x\ y.\, x(x\ y)$
  - $\lceil 3 \rceil \equiv \lambda x\ y.\, x\big(x(x\ y)\big)$

    $\vdots$
  - $\lceil n \rceil \equiv \lambda x\ y.\, \overbrace{x\big(x(\cdots(x}^{n}\ y)\cdots)\big)$
- 演算:
  - $\lceil \mathrm{suc} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z.\, y(x\ y\ z)$
  - $\lceil \mathrm{add} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z\ w.\, x\ z(y\ z\ w)$
  - $\lceil \mathrm{mul} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z\ w.\, x(y\ z)w$
  - $\lceil \mathrm{pred} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z.\, x\big(\lambda u\ v.\, v(u\ y)\big)(\lambda a.\, z)(\lambda a.\, a)$
  - $\lceil \mathrm{zero?} \rceil \equiv \lambda x.\, x(\lambda x.\, \lceil \mathrm{false} \rceil)\lceil \mathrm{true} \rceil$

λ表現での計算を試してみよう

- $\lceil \mathrm{suc} \rceil \lceil 2 \rceil \equiv \left(\lambda x\ y\ z.\, y(x\ y\ z)\right)\left(\lambda x\ y.\, x(x\ y)\right)$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\equiv \lceil 3 \rceil$

- $\lceil \mathrm{add} \rceil \lceil 3 \rceil \lceil 2 \rceil \equiv \left(\lambda x\ y\ z\ w.\, x\ z(y\ z\ w)\right)\left(\lambda x\ y.\, x(x(x\ y))\right)\left(\lambda x\ y.\, x(x\ y)\right)$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\equiv \lceil 5 \rceil$

帰納的関数

- 原始帰納的関数：
  - 基本的関数
    - $zero: N^0 \to N$ $zero() = 0$
    - $suc: N \to N$ $suc(x) = x + 1$
    - $\pi_i^n: N^n \to N$ $\pi_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$
  - 関数の合成
    - $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\big(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$
  - 原始帰納法による関数の定義
    - $f(x_1, \dots, x_n, zero()) = g(x_1, \dots, x_n)$
    - $f\big(x_1, \dots, x_n, suc(y)\big) = h\big(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)\big)$

- 帰納的関数：
  - 最小解演算子
    - $f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$

原始帰納的関数のλ表現

- 基本的関数：
  - $\lceil \mathrm{zero} \rceil \equiv \lceil 0 \rceil \equiv \lambda x\ y.\, y$
  - $\lceil \mathrm{suc} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z.\, y(x\ y\ z)$
  - $\lceil \pi_i^n \rceil \equiv \lambda x_1\ x_2 \cdots\ x_n.\, x_i$

- 関数合成：
  - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g\big(h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$ のとき,

$$\lceil f \rceil \equiv \lambda x_1\ x_2 \cdots\ x_n.\, \lceil g \rceil(\lceil h_1 \rceil x_1\ x_2 \cdots\ x_n) \cdots (\lceil h_m \rceil x_1\ x_2 \cdots x_n)$$

- 例：
  - $\mathrm{dsuc}(x) = \mathrm{suc}\big(\mathrm{suc}(x)\big)$
  - $\lceil \mathrm{dsuc} \rceil \equiv \lambda x.\, \lceil \mathrm{suc} \rceil(\lceil \mathrm{suc} \rceil x)$

原始帰納法

- 単純化して，引数は2つとする.
  - $f(x, zero()) = g(x)$
  - $f\left(x, suc(y)\right) = h\left(x, y, f(x, y)\right)$

- $F \equiv \lceil f \rceil$ の構成:
  - F は次の性質を持たなくてはいけない:
    $F\ x\ y \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\left(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\left(F\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\right)\right)$
  - F は次の M の不動点:
    $M \equiv \lambda f\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\left(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\left(f\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\right)\right)$

  - Curryの不動点演算子 $Y \equiv \lambda y.\left(\lambda x. y(x\ x)\right)\left(\lambda x. y(x\ x)\right)$ を用いると:
    $F \equiv Y\ M$
    $F \equiv Y\left(\lambda f\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\left(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\left(f\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\right)\right)\right)$

最小解演算子

- 単純化して，引数は1つとする.
  - $f(x) = \mu_y(g(x, y) = 0)$

- $F \equiv \lceil f \rceil$ の構成:
  - H を次の性質を満たすλ式とする:
    $H\ x\ y \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(H\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)$
  - H はCurryの不動点演算子 Y を用いることで定義できる:
    $H \equiv Y \left(\lambda h\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(h\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)\right)$
  - $F \equiv \lambda x. H\ x \lceil 0 \rceil$
    $F \equiv \lambda x. Y \left(\lambda h\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(h\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)\right) x \lceil 0 \rceil$

計算可能性

- 計算可能な関数はλ表現可能である.
  - 計算可能な関数は帰納的関数である.
  - 帰納的関数はλ表現を持つ.

- λ表現可能な関数は計算可能である.
  - λ表現可能な関数は最左β変換により実行可能である.
  - λ式を数字でコード化できる.
  - 最左β変換を行うプログラムを作成することができる.

η変換

- 関数の外延性（extensionality）
  - ２つの関数は，与えられた引数に対して同じ値を返す時に等しい．
  - $f = g \Leftrightarrow \forall x\big(f(x) = g(x)\big)$

- $\alpha\beta$同等性では外延性は成り立たない．
  - $P \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} Q$ であれば，$x \notin \mathrm{FV}(PQ)$ に対して $P\ x \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} Q\ x$ が成り立つ．
  - しかし，逆は成り立たない：$\lambda x.\, y\ x \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} y$ ではない．

- η変換：

$$\lambda x.\, P\ x \overset{\eta}{\rightarrow} P$$

ただし $x \notin \mathrm{FV}(P)$

まとめ

- ラムダ式
- ラムダ式の変換
  - α変換
  - β変換
  - η変換
- 計算可能性
  - λ表現
  - 自然数のλ表現