情報数学
第9回　完全半順序とデータ型

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

完全半順序集合

- 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ が完全半順序（complete partial ordered set, cpo）となるのは,
  - 最小元 $\perp$ がある.
  - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \cdots$ となる無限列に対して，上限 $\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i$ がある.

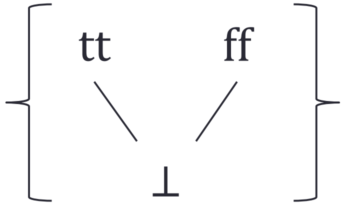
$\boxed{\text{情報の集合}} \subseteq \boxed{\text{完全半順序集合}}$

平坦領域（flat domain）

- 集合 S に最小元 $\perp$ を追加する.
    - $x \in S$ に対して $\perp \sqsubseteq x$

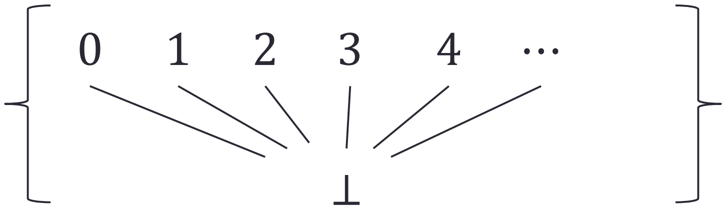
- 例 :
    - 真偽値の集合 $B = \{\mathrm{tt}, \mathrm{ff}\}$ の平坦領域は,

$B_\perp =$



- 自然数の集合 $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ の平坦領域は,

$N_\perp =$



直積(product)

- CPO D_1 と D_2 の直積 $D_1 \times D_2$ とは,
  - $D_1 \times D_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in D_1, y \in D_2\}$
  - $\langle x, y\rangle \sqsubseteq \langle x', y'\rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x'$ かつ $y \sqsubseteq y'$

- $D_1 \times D_2$ はCPOである.
  - 上記の $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
  - $\perp_{\mathrm{D}_1 \times D_2} = \langle \perp_{D_1}, \perp_{\mathrm{D}_2}\rangle$
  - $\langle x_1, y_1\rangle \sqsubseteq \langle x_2, y_2\rangle \sqsubseteq \langle x_3, y_3\rangle \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq \langle x_i, y_i\rangle \sqsubseteq \cdots$ に対して,

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \langle x_i, y_i\rangle = \langle \bigsqcup_{i=1}^{\infty} x_i , \bigsqcup_{i=1}^{\infty} y_i\rangle$$

直積の例

- $B_\perp \times B_\perp$　ハッセ図を描きなさい.
- $(B_\perp \times B_\perp) \times B_\perp$

真偽値に関する関数

- $\mathrm{not}: B \to B$

	ff	tt
not	tt	ff

- $\mathrm{not}_{\perp}: B_{\perp} \to B_{\perp}$

	$\perp$	ff	tt
$\mathrm{not}_{\perp}$			

- $\mathrm{and}: B \times B \to B$

and	ff	tt
ff	ff	ff
tt	ff	tt

- $\mathrm{or}: B \times B \to B$

or	ff	tt
ff	ff	tt
tt	tt	tt

or の連続関数への拡張

- $\mathrm{or}_\perp : B_\perp \times B_\perp \to B_\perp$

$\mathrm{or}_\perp$	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\mathrm{or}_R : B_\perp \times B_\perp \to B_\perp$

or_R	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\mathrm{or}_L : B_\perp \times B_\perp \to B_\perp$

or_L	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

- $\mathrm{or}_P : B_\perp \times B_\perp \to B_\perp$

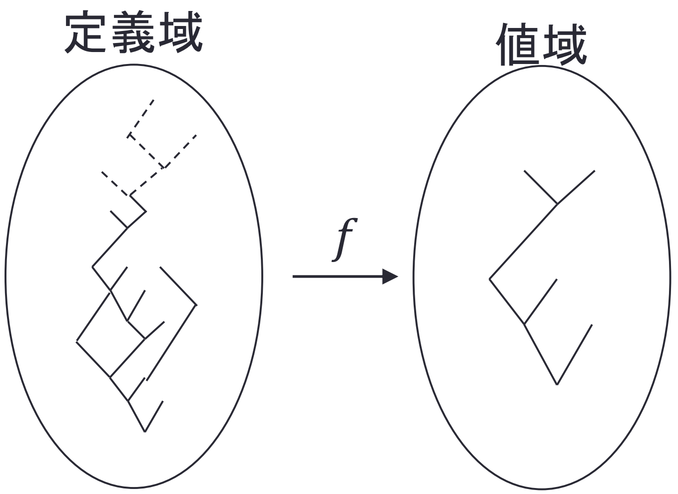
or_P	$\perp$	ff	tt
$\perp$			
ff		ff	tt
tt		tt	tt

条件関数

- cond: $B_\perp \times N_\perp \times N_\perp \to N_\perp$
  - $\mathrm{cond}(\perp, x, y) = \perp$
  - $\mathrm{cond}(\mathrm{tt}, x, y) = x$
  - $\mathrm{cond}(\mathrm{ff}, x, y) = y$

連続関数の性質

- 値域の階数が有限であるとき,
  - 単調であれば連続である.



- $f\colon D_1 \times D_2 \to D_3$ が連続である $\Leftrightarrow$
  - $b \in D_2$ に対して $f_b\colon D_1 \to D_3$ が連続である.
    $$f_b(x) = f(x, b)$$
  - $a \in D_1$ に対して $f^a\colon D_2 \to D_3$ が連続である.
    $$f^a(y) = f(a, y)$$

直積に関連する連続関数

- 射影（projection）
  - $\pi_1 : D_1 \times D_2 \to D_1$
    - $\pi_1(\langle x, y \rangle) = x$
  - $\pi_2 : D_1 \times D_2 \to D_2$
    - $\pi_2(\langle x, y \rangle) = y$

$$\begin{tikzcd}
x & & \langle x, y \rangle \arrow[ll, dashed, mapsto] \arrow[rr, dashed, mapsto] & & y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, shift right, "\iota_1"'] & & D_1 \times D_2 \arrow[ll, shift right, "\pi_1"'] \arrow[rr, shift left, "\pi_2"] & & D_2 \arrow[ll, shift left, "\iota_2"]
\end{tikzcd}$$

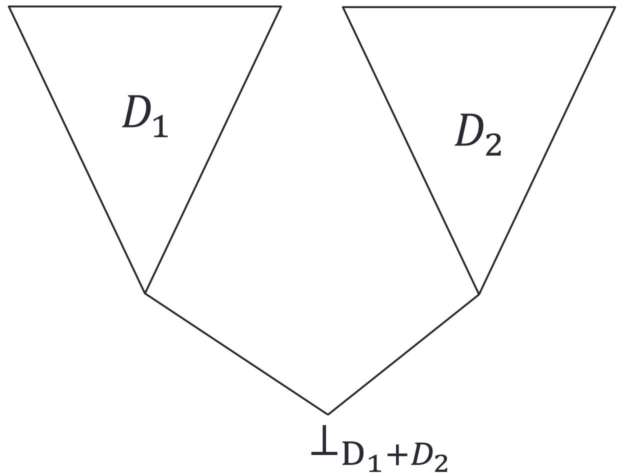
$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dashed, mapsto] & \langle x, \bot_{D_2} \rangle & \langle \bot_{D_1}, y \rangle & y \arrow[l, dashed, mapsto]
\end{tikzcd}$$

- 埋め込み（injection, embedding）
  - $\iota_1 : D_1 \to D_1 \times D_2$
    - $\iota_1(x) = \langle x, \bot_{D_2} \rangle$
  - $\iota_2 : D_2 \to D_1 \times D_2$
    - $\iota_2(y) = \langle \bot_{D_1}, y \rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bullet\ \iota_1 \circ \pi_1(z) \sqsubseteq z \\
\bullet\ \iota_2 \circ \pi_2(z) \sqsubseteq z \\
\bullet\ \pi_1 \circ \iota_1(x) = x \\
\bullet\ \pi_2 \circ \iota_1(x) = \bot_{D_2} \\
\bullet\ \pi_1 \circ \iota_2(y) = \bot_{D_1} \\
\bullet\ \pi_2 \circ \iota_2(y) = y
\end{array} \right.$$

直和（co-product）

- CPO D_1 と D_2の直和 $D_1 + D_2$ とは,
  - $D_1 + D_2 = \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_1\} \cup \{\langle y, 2\rangle \mid y \in D_2\} \cup \{\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2}\}$
    - $\langle x, 1\rangle \sqsubseteq \langle x', 1\rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x'$
    - $\langle y, 2\rangle \sqsubseteq \langle y', 2\rangle \Leftrightarrow y \sqsubseteq y'$
    - $\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2} \sqsubseteq \langle x, 1\rangle$
    - $\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2} \sqsubseteq \langle y, 2\rangle$



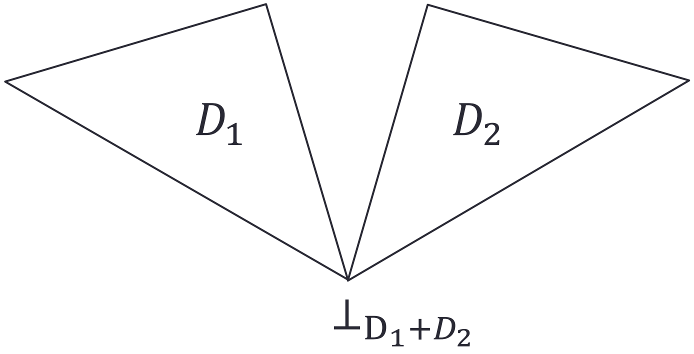
- $D_1 + D_2$ はCPOである.
  - 上記 $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
  - $\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2}$ が最小元.
  - 上昇数列は D_1 あるいは D_2 の中に閉じたものなので上限がある.

直和の例

- $B_{\perp} + B_{\perp}$　　ハッセ図を描きなさい.
- $(B_{\perp}+B_{\perp}) + B_{\perp}$

もう一つの直和(smashed co-product)

- CPO D_1 と D_2 のsmashed co-product $D_1 \oplus D_2$ とは,
  - $D_1 \oplus D_2 = \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_1,\ x \neq \perp_{\mathrm{D}_1}\} \cup \{\langle y, 2\rangle \mid y \in D_2,\ y \neq \perp_{\mathrm{D}_2}\} \cup \{\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2}\}$
    - $\langle x, 1\rangle \sqsubseteq \langle x', 1\rangle \Leftrightarrow x \sqsubseteq x'$
    - $\langle y, 2\rangle \sqsubseteq \langle y', 2\rangle \Leftrightarrow y \sqsubseteq y'$
    - $\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2} \sqsubseteq \langle x, 1\rangle$
    - $\perp_{\mathrm{D}_1 + D_2} \sqsubseteq \langle y, 2\rangle$



直和に関係する連続関数

- 射影（projection）
  - $\pi_1: D_1 + D_2 \to D_1$
    - $\pi_1(\langle x, 1\rangle) = x$
    - $\pi_1(\langle y, 2\rangle) = \bot_{D_1}$
    - $\pi_1(\bot_{D_1+D_2}) = \bot_{D_1}$
  - $\pi_2: D_1 + D_2 \to D_2$
    - $\pi_2(\langle x, 1\rangle) = \bot_{D_2}$
    - $\pi_2(\langle y, 2\rangle) = y$
    - $\pi_2(\bot_{D_1+D_2}) = \bot_{D_2}$

$$
\begin{tikzcd}
x & \langle x, 1\rangle \arrow[l, dashed] & \langle y, 2\rangle \arrow[r, dashed] & y \\
D_1 \arrow[rr, shift right, "\iota_1"'] & & D_1 + D_2 \arrow[ll, shift right, "\pi_1"'] \arrow[r, shift left, "\pi_2"] & D_2 \arrow[l, shift left, "\iota_2"] \\
x \arrow[r, dashed] & \langle x, 1\rangle & \langle y, 2\rangle & y \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

- 埋め込み（injection, embedding）
  - $\iota_1: D_1 \to D_1 + D_2$
    - $\iota_1(x) = \langle x, 1\rangle$
    - $\iota_1(\bot_{D_1}) = \bot_{D_1+D_2}$
  - $\iota_2: D_2 \to D_1 + D_2$
    - $\iota_2(y) = \langle y, 2\rangle$
    - $\iota_2(\bot_{D_2}) = \bot_{D_1+D_2}$

- $\iota_1 \circ \pi_1(z) \sqsubseteq z$
- $\iota_2 \circ \pi_2(z) \sqsubseteq z$
- $\pi_1 \circ \iota_1(x) = x$
- $\pi_2 \circ \iota_1(x) = \bot_{D_2}$
- $\pi_1 \circ \iota_2(y) = \bot_{D_1}$
- $\pi_2 \circ \iota_2(y) = y$

関数空間(function space)

- CPO D_1 から D_2 への**関数空間** $[D_1 \to D_2]$ とは,
  - $[D_1 \to D_2] = \{f : D_1 \to D_2 \mid f$ は連続である$\}$
  - $f \sqsubseteq f' \Leftrightarrow\ x \in D_1$ に対して $f(x) \sqsubseteq f'(x)$

- $[D_1 \to D_2]$ はCPOである.
  - 上記の $\sqsubseteq$ は半順序になっている.
  - $\bot_{[\mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2]}\ (x) = \bot_{\mathrm{D}_2}$
  - $f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq f_3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f_i \sqsubseteq \cdots$ に対して,

$$(\sqcup_{i=1}^{\infty} f_i)(x)\ = \sqcup_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

- 射影と埋め込み
  - $\pi : [D_1 \to D_2] \to D_2$
  - $\pi(f) = f(\bot)$
  - $\iota : D_2 \to [D_1 \to D_2]$
  - $\iota(y)(x) = y$

$$\begin{cases} \iota \circ \pi(f) \sqsubseteq f \\ \pi \circ \iota(y) = y \end{cases}$$

関数空間の例

- $B = \{\mathrm{tt}, \mathrm{ff}\}$ としたとき $[B_\perp \to B_\perp]$ を求めなさい.

$$B_\perp = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{tt} & & \mathrm{ff} \\ & \perp \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd} \right\} \xrightarrow{\quad f \quad} B_\perp = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{tt} & & \mathrm{ff} \\ & \perp \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd} \right\}$$

射影と埋め込み

- $D_1 \lhd D_2$
  - $\pi : D_2 \to D_1$　射影
  - $\iota : D_1 \to D_2$　埋め込み
  - $\iota \circ \pi(y) \sqsubseteq y$　　$\iota \circ \pi \sqsubseteq id_{D_2}$
  - $\pi \circ \iota(x) \sqsupseteq x$　　$\pi \circ \iota \sqsupseteq id_{D_1}$

- 直積: $D_1 \times D_2$
  - $D_1 \lhd D_1 \times D_2$
  - $D_2 \lhd D_1 \times D_2$

- 直和: $D_1 + D_2$
  - $D_1 \lhd D_1 + D_2$
  - $D_2 \lhd D_1 + D_2$

- 関数空間:$[D_1 \to D_2]$
  - $D_2 \lhd [D_1 \to D_2]$

まとめ

- 領域
  - 平坦領域
  - 直積
  - 直和
  - 関数空間