

情報数学

第12回 圏論

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

集合論

- 集合論
 - 現代数学の基礎
 - 集合 $\equiv$ ある性質を持った要素を集めたもの
 - $\emptyset$
 - $A \cup B$
 - $A \cap B$
 - A^c
 - $\{x \in A \mid x \text{ に関する論理式}\}$
 - 要素に関する記述が重要: すなわち, いつ $x \in A$ なのか
- 集合論の限界
 - ラッセルのパラドックス
 - 集合の集合は集合ではない.
 - $R = \{x \mid x \notin x\}$
 - $R \in R$ か $R \notin R$ か?

圏論(カテゴリー理論)

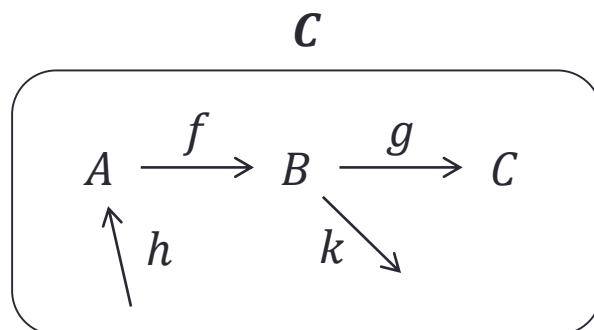
- 集合論に代わる基礎理論
- Abstract Nonsenseともいわれる
- 中身の記述ではなく, 他との関係で表す

集合論	圏論
$x \in A$	$A \rightarrow B$
中身に対する記述	外からの記述
中身	他との関係

- バラバラだった概念を統一的に扱うことが可能になる
- 対称性を見出しやすい

卷

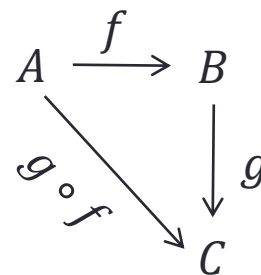
- 圏 $\mathcal{C}$ は次のものからなる:
 - 対象 (object) の集まり: $\mathcal{C} = \{A, B, C, \dots\}$
 - 対象 A と B に対して, A から B への射 (arrow, morphism) の集まり: $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f, g, h, \dots\}$
 - $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ のとき $f: A \rightarrow B$ と書く
 - A は f の定義域 (domain)
 - B は f の値域 (codomain, range)



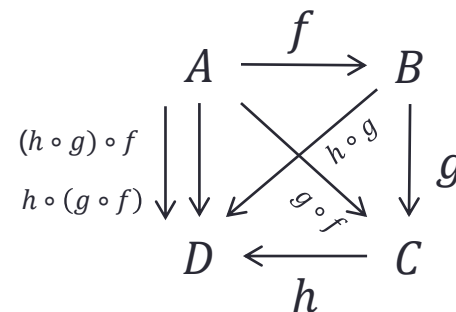
圏(つづき)

- 圏 C は次の条件を満たさなくてはならない:

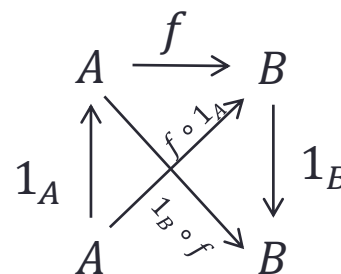
- $f: A \rightarrow B$ および $g: B \rightarrow C$ のとき
 $g \circ f: A \rightarrow C$



- $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ のとき
 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$



- 対象 A にたいして射 $1_A: A \rightarrow A$ があり,
 $f: A \rightarrow B$ に対して
 $f \circ 1_A = f$ および $1_B \circ f = f$



圏の例

- **Set**: 集合の圏

- 対象: 集合
- 射: 関数
- $\circ$: 関数の合成
- $1_A: A$ の恒等関数

- **Grp**: 群の圏

- 対象: 群 $(G, \cdot, e, {}^{-1})$
- 射: 群の準同型
- $\circ$: 関数の合成
- $1_A: A$ の恒等関数

- **CPO**: 完全半順序集合の圏

- 対象: 完全半順序集合
- 射: 連続関数
- $\circ$: 関数の合成
- $1_A: A$ の恒等関数

$(G, \cdot, e, {}^{-1})$: 群

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $x \cdot e = e \cdot x = x$
- $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

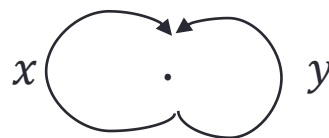
準同型: $f: G \rightarrow H$

- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

圏の例(つづき)

• 半群 $(M, \cdot, e)$ 自身

- 対象: 1つの要素のみ
- 射: 半群の要素 M
- $\circ$: 半群の演算 $\cdot$
- 1 : 単位元 e

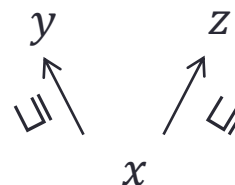


$(M, \cdot, e)$: 半群

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $x \cdot e = e \cdot x = x$

• 半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$ 自身

- 対象: D の要素
- 射: $\sqsubseteq$ (射 $x \rightarrow y$ は高々1つ)
- $\circ$: 「 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$ 」
- 1_x : 「 $x \sqsubseteq x$ 」



$(D, \sqsubseteq)$: 半順序集合

- $x \sqsubseteq x$
- $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$
- $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$

双対圏

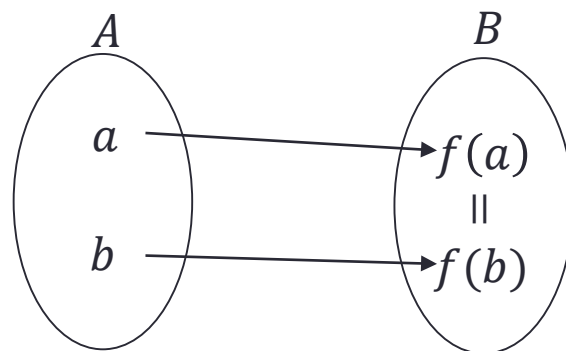
- 圏 $\mathcal{C}$ の双対圏 $\mathcal{C}^{op}$ を次のように定義する
 - $\mathcal{C}^{op}$ の対象 = $\mathcal{C}$ の対象
 - $\mathcal{C}^{op}$ の射 $\text{hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ $\mathcal{C}$ の射
 - 射の向きを反対にする



- 圏 $\mathcal{C}$ で成り立つことは, 双対圏 $\mathcal{C}^{op}$ でも成り立つ.
 - $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

単射

- 一対一写像 (one-to-one)
 - 写像 $f: A \rightarrow B$ が一対一写像である
 $\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ ならば $a = b$ である.



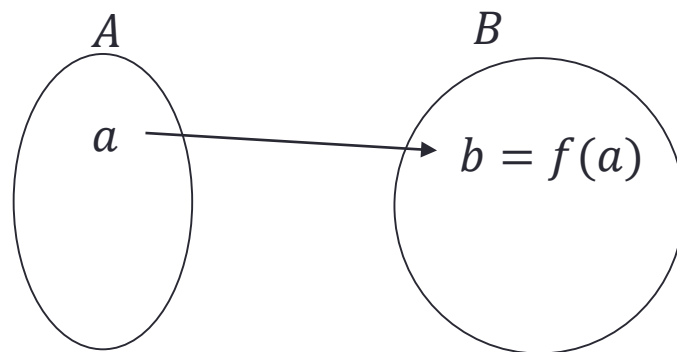
- 単射 (mono)
 - $f: A \rightarrow B$ が単射である
 $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: D \rightarrow A$ および $h: D \rightarrow A$ に対して, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$.

$$D \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

全射

- 上への写像 (onto)

- 写像 $f: A \rightarrow B$ が上への写像である
 - $\Leftrightarrow$ 任意の要素 $b \in B$ に対して $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ となる.



- 全射 (epi)

- $f: A \rightarrow B$ が全射である
 - $\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: B \rightarrow D$ および $h: B \rightarrow D$ に対して, if $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \begin{matrix} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} D$$

単射と全射

• 単射 (mono)

- $f: A \rightarrow B$ が単射である

$\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: D \rightarrow A$ および $h: D \rightarrow A$ に対して, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$.

$$D \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

C^{op} の単射は C の全射

• 全射 (epi)

- $f: A \rightarrow B$ が全射である

$\Leftrightarrow$ 任意の対象 D と射 $g: B \rightarrow D$ および $h: B \rightarrow D$ に対して, if $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{g} \end{array} D$$

C^{op} の全射は C の単射

同型

- 同型 (isomorphic, iso)

- 対象 A と B は同型である

$\Leftrightarrow$ 射 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow A$ があり, $g \circ f = 1_A$ および $f \circ g = 1_B$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B$$

同型な対象は C では同じ役割を果たす

- 定理: $f: A \rightarrow B$ が同型の射であれば, monoでありepiである.
- 逆は, 集合では成り立つが一般には成り立たない.

始対象と終対象

- 始対象 (initial object) I
 - すべての対象 A に対して唯一の射が存在する

$$I \overset{!}{\dashrightarrow} A$$

- 終対象 (final object) F
 - すべての対象 A から唯一の射が存在する

$$A \overset{!}{\dashrightarrow} F$$

	始対象	終対象
Set	$\emptyset$	$\{\cdot\}$
Grp	$\{e\}$	$\{e\}$
CPO		$\{\perp\}$
半順序集合	$\perp$	$\top$

始対象の一意性

- **定理:** 始対象は存在すれば同型を除いて一意である.
- **証明:** もし2つの始対象 I と I' があったとする.
 - I が始対象なので, 一意的な射 $f: I \rightarrow I'$ が存在する.
 - I' が始対象なので, 一意的な射 $g: I' \rightarrow I$ が存在する.
 - $g \circ f$ は I から I への射である.
 - I は始対象なので, 一意的な射の 1_I と一致しなくてはならない.
 - $g \circ f = 1_I$

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \xrightarrow{\quad f \quad} & I' & \xrightarrow{\quad g \quad} & I \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 1_I & &
 \end{array}$$

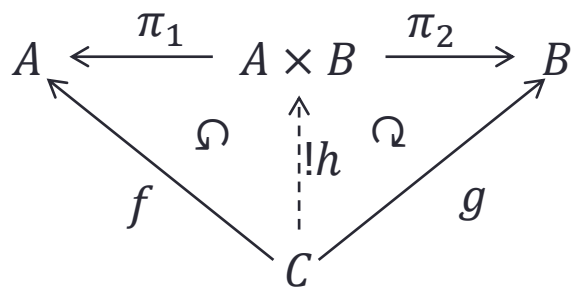
- 同様に, $f \circ g = 1_{I'}$.
- したがって, I と I' は同型である. QED
- **双対定理:** 終対象は存在すれば同型を除いて一意である.

直積と直和

- $A \times B$ は A と B の直積 (product) $\Leftrightarrow$

- 射 $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ と $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ が存在する
- 任意の対象 C と射 $f: C \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ に対して,

次の図を可換にする射 $h: C \rightarrow A \times B$ が唯一存在する



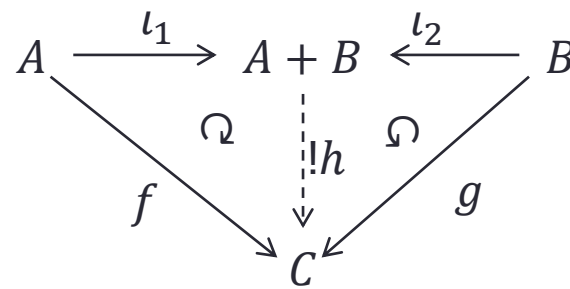
$$\pi_1 \circ h = f$$

$$\pi_2 \circ h = g$$

- $A + B$ は A と B の直和 (co-product) $\Leftrightarrow$

- 射 $\iota_1: A \rightarrow A + B$ と $\iota_2: B \rightarrow A + B$ が存在する
- 任意の対象 C と射 $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$ に対して,

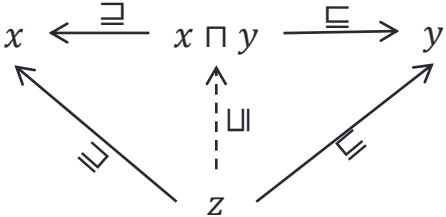
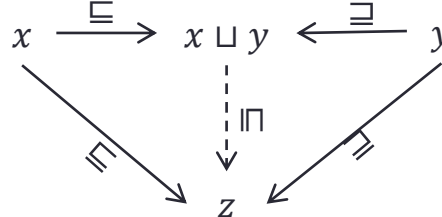
次の図を可換にする射 $h: A + B \rightarrow C$ が唯一存在する



$$h \circ \iota_1 = f$$

$$h \circ \iota_2 = g$$

直積と直和

	直積	直和
Set	$A \times B = \{(x, y) x \in A \text{ かつ } y \in B\}$ $\pi_1((x, y)) = x$ $\pi_2((x, y)) = y$ $f: C \rightarrow A$ および $g: C \rightarrow B$ のとき $h(z) = (f(z), g(z))$	$A + B = \{(x, 1) x \in A\} \cup \{(y, 2) y \in B\}$ $\iota_1(x) = (x, 1)$ $\iota_2(y) = (y, 2)$ $f: A \rightarrow C$ および $g: B \rightarrow C$ のとき $h((x, 1)) = f(x), h((y, 2)) = g(y)$
半順序集合 ($D, \sqsubseteq$)	$x \times y = x \sqcap y$ $\pi_1: x \sqcap y \sqsubseteq x$ $\pi_2: x \sqcap y \sqsubseteq y$ $f: z \sqsubseteq x$ および $g: z \sqsubseteq y$ のとき $h: z \sqsubseteq x \sqcap y$ 	$A + B = x \sqcup y$ $\iota_1: x \sqsubseteq x \sqcup y$ $\iota_2: y \sqsubseteq x \sqcup y$ $f: x \sqsubseteq z$ および $g: y \sqsubseteq z$ のとき $h: x \sqcup y \sqsubseteq z$ 

- **定理:** 直積 $A \times B$ は存在すれば, 同型を除いてユニークである.
- **双対の定理:** 直和 $A + B$ は存在すれば, 同型を除いてユニークである.

まとめ

- 圏論 (カテゴリー理論)
 - 数学の基礎理論の一つ
- 圏 (カテゴリー)
 - 対象
 - 射
- 特別な対象
 - 始対象と終対象
 - 直積と直和