情報数学
第13回　極限と随伴関手

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

始対象と終対象

- 始対象（initial object）I
  - すべての対象 A に対して唯一の射が存在する

$$I \xrightarrow{!} A$$

- 終対象（final object）F
  - すべての対象 A から唯一の射が存在する

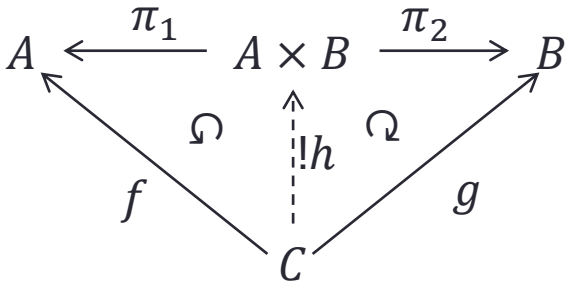
$$A \xrightarrow{!} F$$

	始対象	終対象
Set	$\emptyset$	$\{\cdot\}$
Grp	$\{e\}$	$\{e\}$
CPO		$\{\bot\}$
半順序集合	$\bot$	$\top$

直積と直和

- $A \times B$ は A と B の直積（product）$\Leftrightarrow$
  - 射 $\pi_1 : A \times B \to A$ と $\pi_2 : A \times B \to B$ が存在する
  - 任意の対象 C と射 $f : C \to A$, $g : C \to B$ に対して，

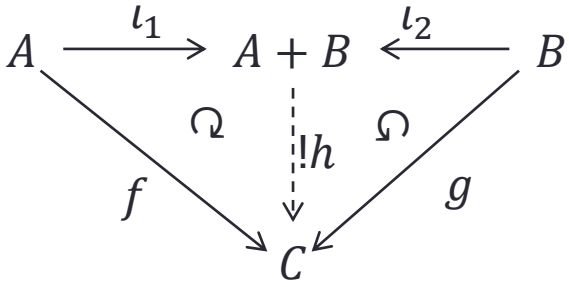
    次の図を可換にする射 $h : C \to A \times B$ が唯一存在する



$\pi_1 \circ h = f$　　$\pi_2 \circ h = g$

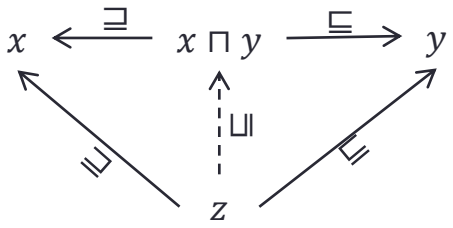
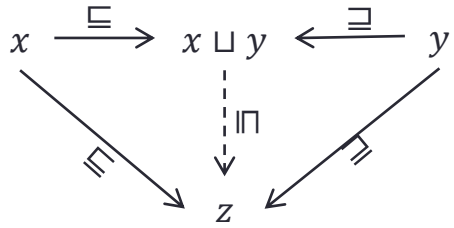
- $A + B$ は A と B の直和（co-product）$\Leftrightarrow$
  - 射 $\iota_1 : A \to A + B$ と $\iota_2 : B \to A + B$ が存在する
  - 任意の対象 C と射 $f : A \to C$, $g : B \to C$ に対して，

    次の図を可換にする射 $h : A + B \to C$ が唯一存在する



$h \circ \iota_1 = f$　　$h \circ \iota_2 = g$

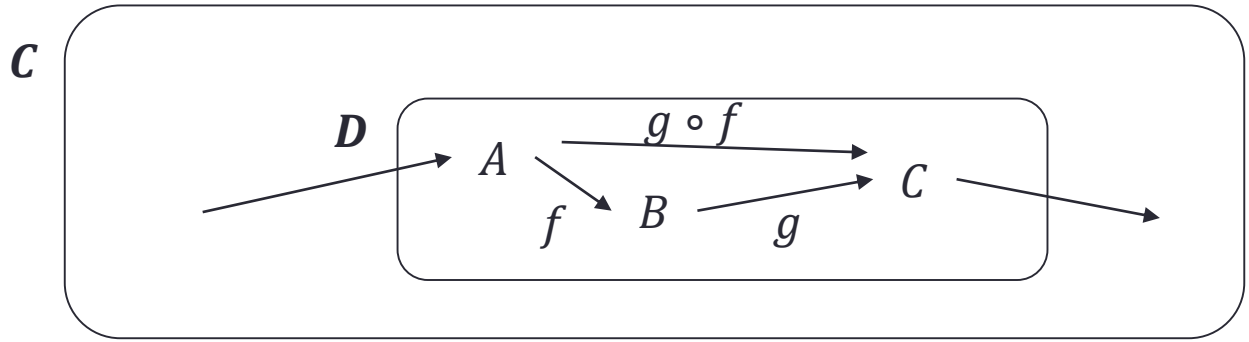
直積と直和

	直積	直和
Set	• $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$ • $\pi_1\big((x,y)\big) = x$ • $\pi_2\big((x,y)\big) = y$ • $f: C \to A$ および $g: C \to B$ のとき $h(z) = \big(f(z), g(z)\big)$	• $A + B = \{(x,1) \mid x \in A\} \cup \{(y,2) \mid y \in B\}$ • $\iota_1(x) = (x,1)$ • $\iota_2(y) = (y,2)$ • $f: A \to C$ および $g: B \to C$ のとき $h\big((x,1)\big) = f(x),\ h\big((y,2)\big) = g(y)$
半順序集合 $(D, \sqsubseteq)$	• $x \times y = x \sqcap y$ • $\pi_1: x \sqcap y \sqsubseteq x$ • $\pi_2: x \sqcap y \sqsubseteq y$ • $f: z \sqsubseteq x$ および $g: z \sqsubseteq y$ のとき $h: z \sqsubseteq x \sqcap y$ 	• $A + B = x \sqcup y$ • $\iota_1: x \sqsubseteq x \sqcup y$ • $\iota_2: y \sqsubseteq x \sqcup y$ • $f: x \sqsubseteq z$ および $g: y \sqsubseteq z$ のとき $h: x \sqcup y \sqsubseteq z$ 

- **定理**: 直積 $A \times B$ は存在すれば，同型を除いてユニークである．
- **双対の定理**: 直和 $A + B$ は存在すれば，同型を除いてユニークである．

部分圏

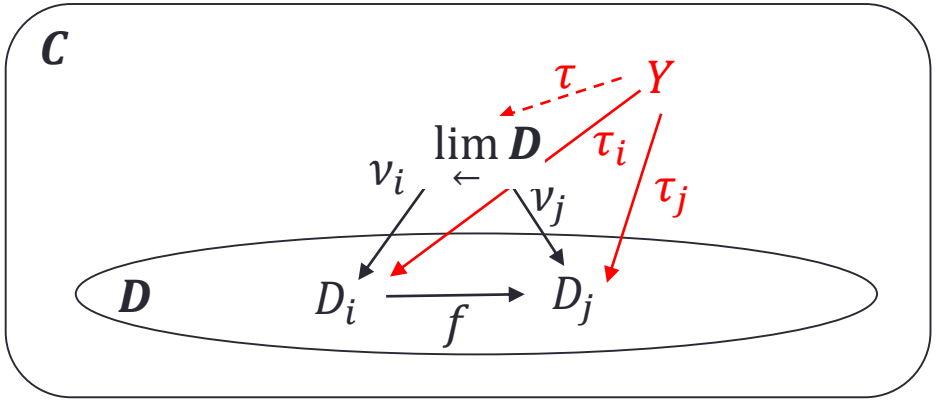
- 圏 $\boldsymbol{C}$ の対象と射の集まり $\boldsymbol{D}$ は次の条件を満たすとき，部分圏という．
  - $A \in \boldsymbol{D}$ ならば $A \in \boldsymbol{C}$
  - $f \in \boldsymbol{D}$ で $f: A \to B$ ならば，$A, B \in \boldsymbol{D}$
  - $A \in \boldsymbol{D}$ ならば $1_A \in \boldsymbol{D}$
  - $f, g \in \boldsymbol{D}$ ならば $g \circ f \in \boldsymbol{D}$



- 部分圏 $\boldsymbol{D}$ はそれだけを見れば圏である．
- これまでに書いた図式はほとんどは部分圏である．

極限(limit)

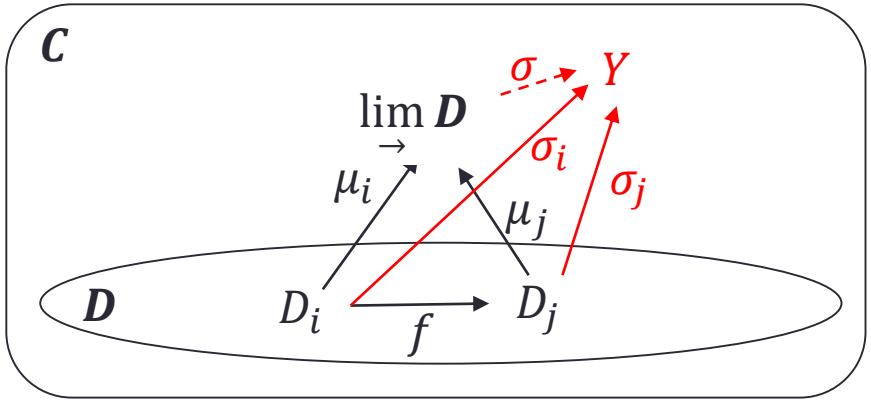
- 圏 $\boldsymbol{C}$ の部分圏 $\boldsymbol{D}$ の極限(limit)とは，次の条件を満たす $\boldsymbol{C}$ の対象 X である.
  - X から $\boldsymbol{D}$ のすべての対象 D_i に対して射 $\nu_i: X \to D_i$ が存在する.
  - $f \in D$ で $f: D_i \to D_j$ ならば $f \circ \nu_i = \nu_j$
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 Y と，Y から $\boldsymbol{D}$ の対象 D_i への射 $\tau_i: Y \to D_i$ で，$f \in D$, $f: D_i \to D_j$ に対して $f \circ \tau_i = \tau_j$ であれば，$\tau: Y \to X$ で $\tau_i = \nu_i \circ \tau$ となるような τ が唯一存在する.

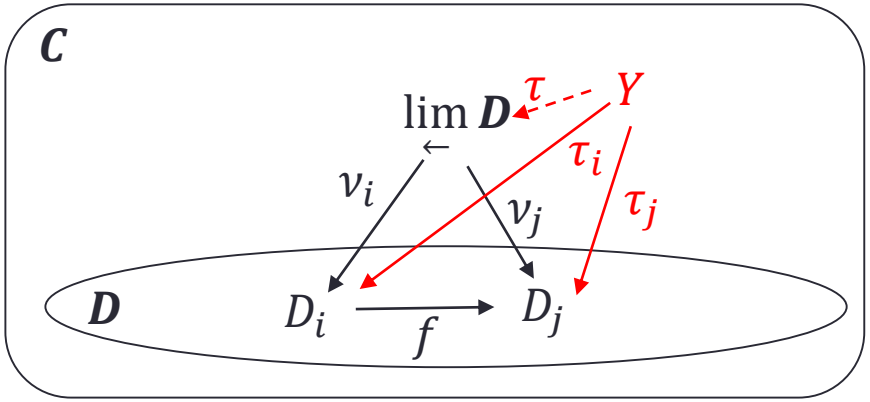


- $\boldsymbol{D}$ の極限 X を $\varprojlim \boldsymbol{D}$ と書く.

余極限（colimit）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ の部分圏 $\boldsymbol{D}$ の余極限（colimit）とは，次の条件を満たす $\boldsymbol{C}$ の対象 X である．
  - X から $\boldsymbol{D}$ のすべての対象 D_i に対して射 $\mu_i: D_i \to X$ が存在する．
  - $f \in D$ で $f: D_i \to D_j$ ならば $\mu_j \circ f = \mu_i$
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 Y と，$\boldsymbol{D}$ の対象 D_i から Y への射 $\sigma_i: D_i \to Y$ で，$f \in D$，$f: D_i \to D_j$ に対して $\sigma_j \circ f = \tau_i$ であれば，$\sigma: X \to Y$ で $\sigma_i = \sigma \circ \mu_i$ となるような σ が唯一存在する．



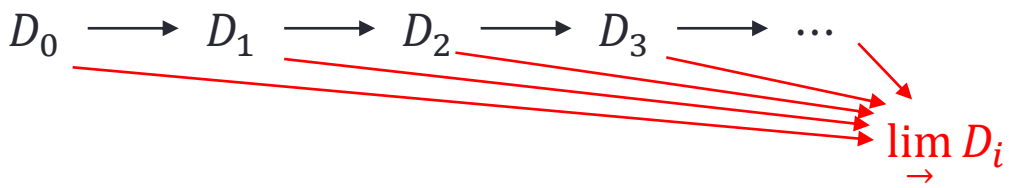


- $\boldsymbol{D}$ の余極限 X を $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書く．

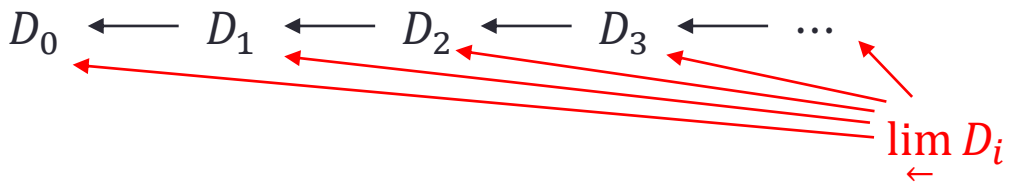
$\varinjlim \boldsymbol{D}$ と $\varprojlim \boldsymbol{D}$ は双対

帰納的極限と射影的極限

- **帰納的極限**（inductive limit）
  - 次の図式の余極限（colimit）

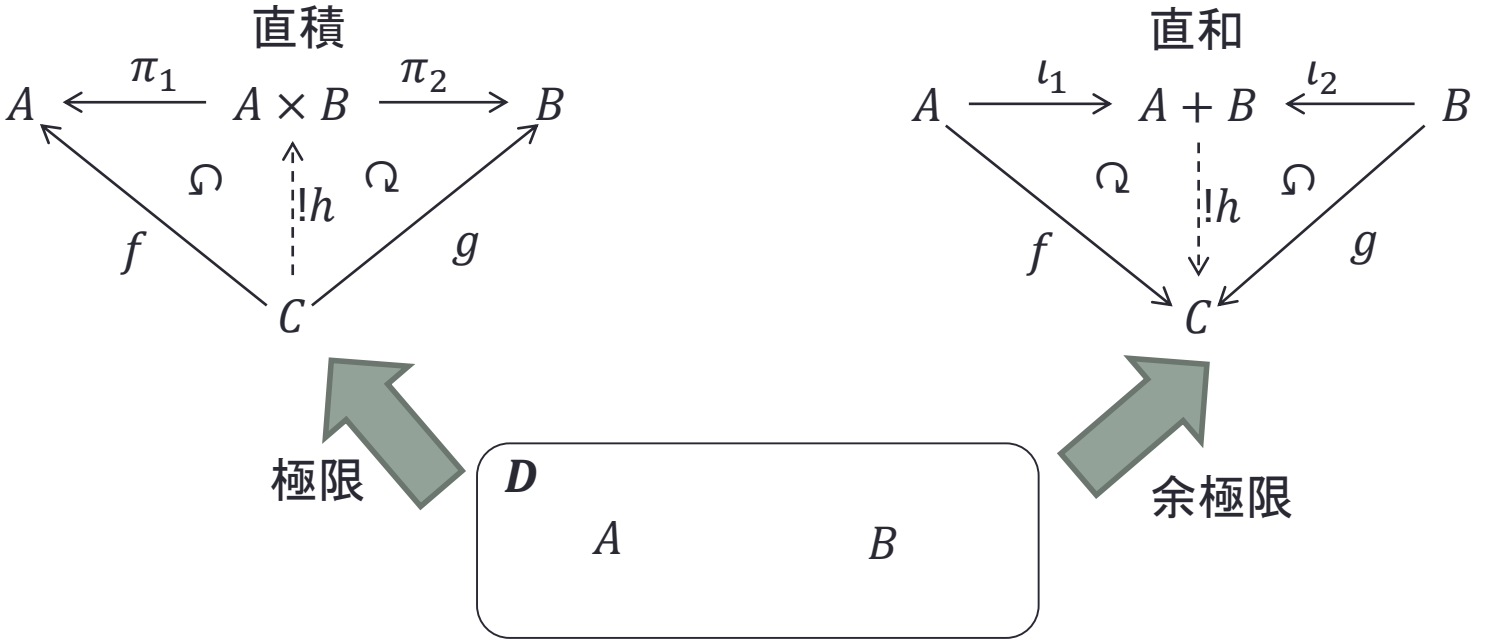


- **射影的極限**（projective limit）
  - 次の図式の極限（limit）



すべては極限と余極限

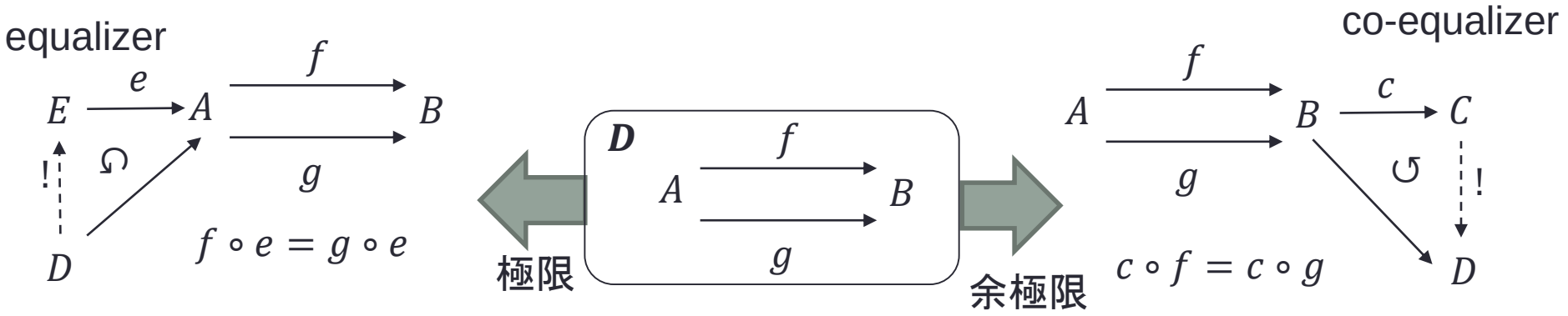
- 積と和



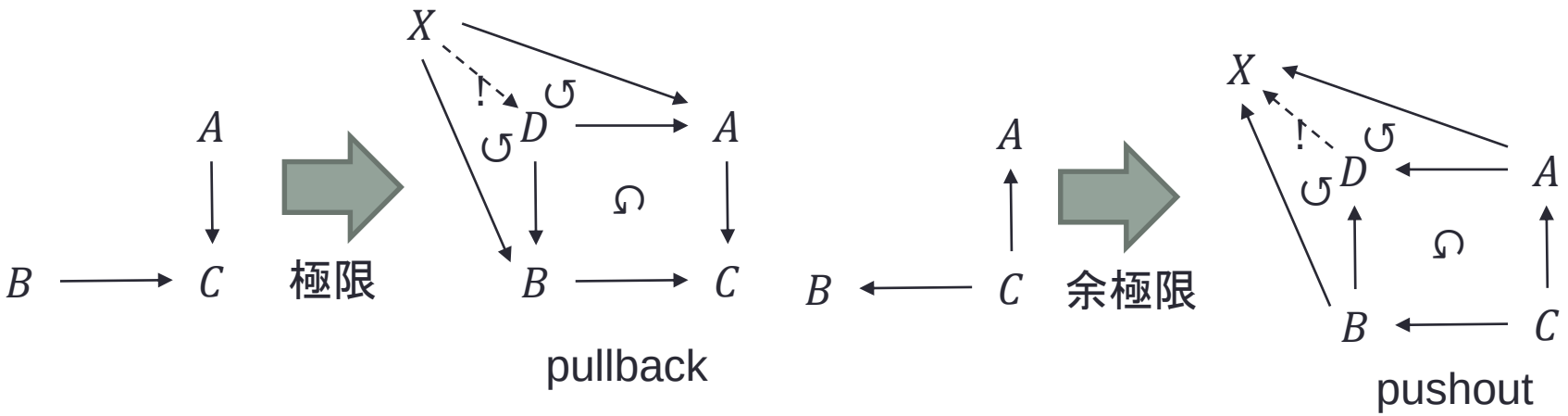
- 終対象と始対象

その他の極限と余極限

- equalizer と co-equalizer

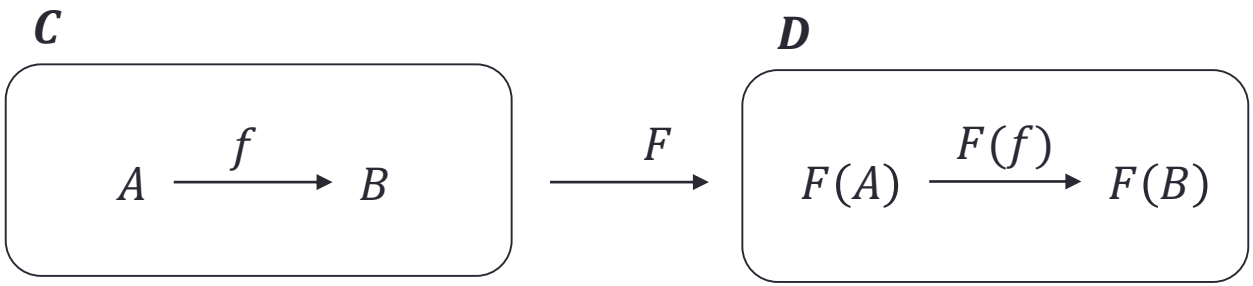


- pullback と pushout

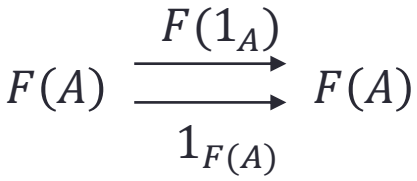


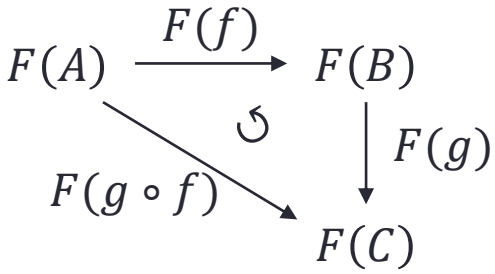
関手（Functor）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $F\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f\colon A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f)\colon F(A) \to F(B) \in \boldsymbol{D}$



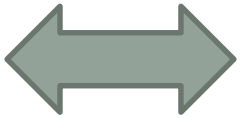
  - $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(1_A) = 1_{F(A)}$
  - $f\colon A \to B,\ g\colon B \to C \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$





関手（例）

- 忘却関手（forgetful functor)
  - 構造を忘れる関手
  - $G: \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$
    - $G\left((S, \cdot, e, \ ^{-1})\right) = S$
    - $G(f) = f$



- 自由関手（free functor)
  - 構造を与える関手
  - $F: \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Grp}$
    - $F(S) = S$から生成された自由群
    - $F(f) = f$を群の準同型に自然に拡張

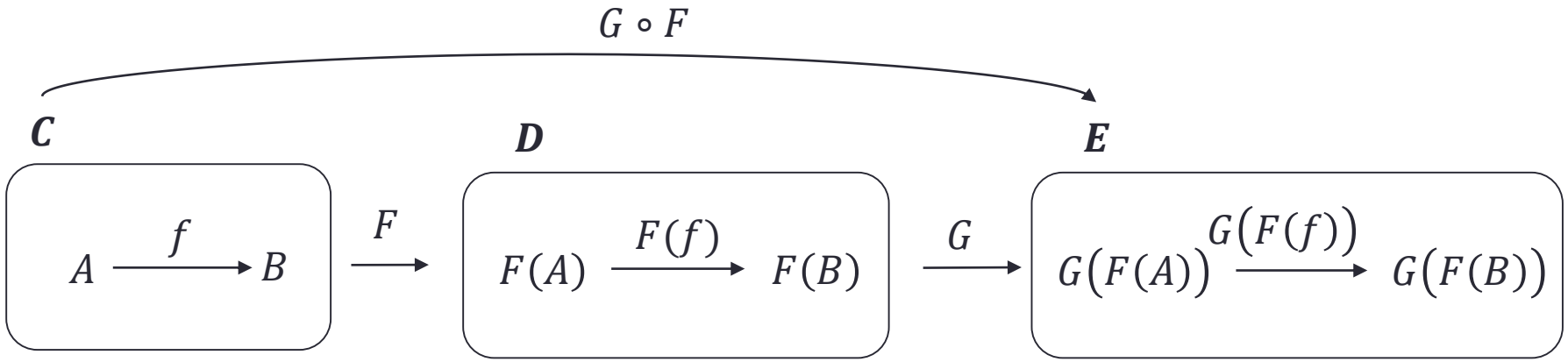
- 半群間の関手
  - $F: (M, \cdot, e) \to (N, \cdot, e)$
  - $F(e) = e$
  - $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$
  - 半群関の準同型

- 半順序集合間の関手
  - $F: (D, \sqsubseteq) \to (E, \sqsubseteq)$
  - $x \sqsubseteq y$ ならば $F(x) \sqsubseteq F(y)$
  - 単調な関数

関手の合成

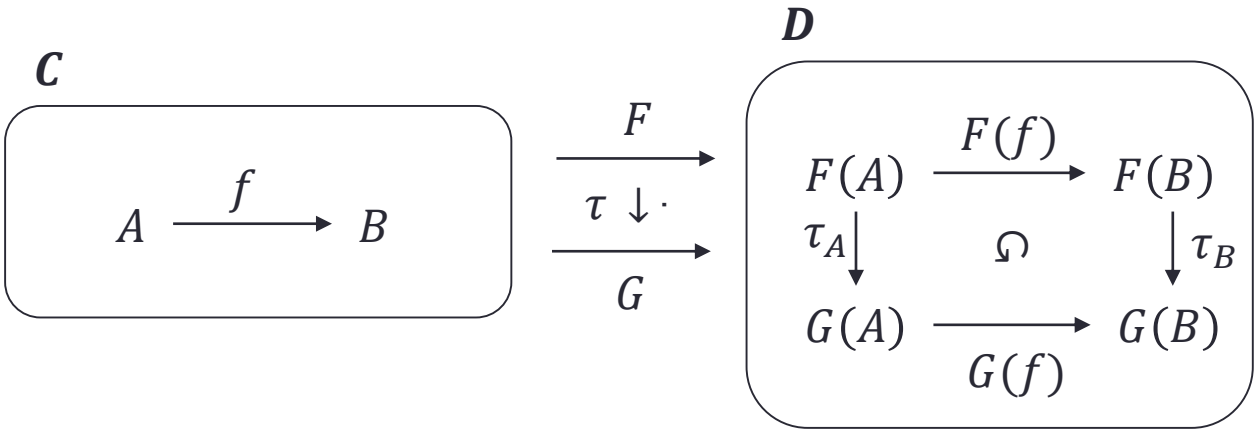
- 関手の合成
  - 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - 圏 $\boldsymbol{D}$ から 圏 $\boldsymbol{E}$ への関手 $G: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{E}$

- $G \circ F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{E}$
  - $G \circ F(A) = G\big(F(A)\big)$
  - $G \circ F(f) = G\big(F(f)\big)$

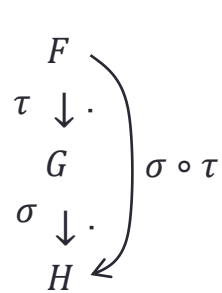


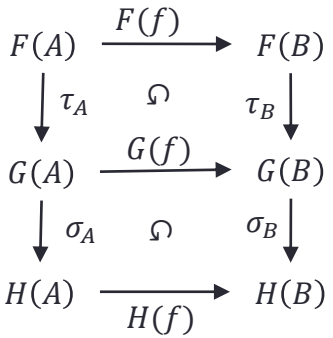
自然変換（natural transformation）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への2つの関手 $F, G: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ に対して $\tau: F \dot{\to} G$ が自然変換であるとは：
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{D}$ の射 $\tau_A: F(A) \to G(A)$ が存在する．
  - 射 $f: A \to B \in C$ に対して，$\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$ が成り立つ．



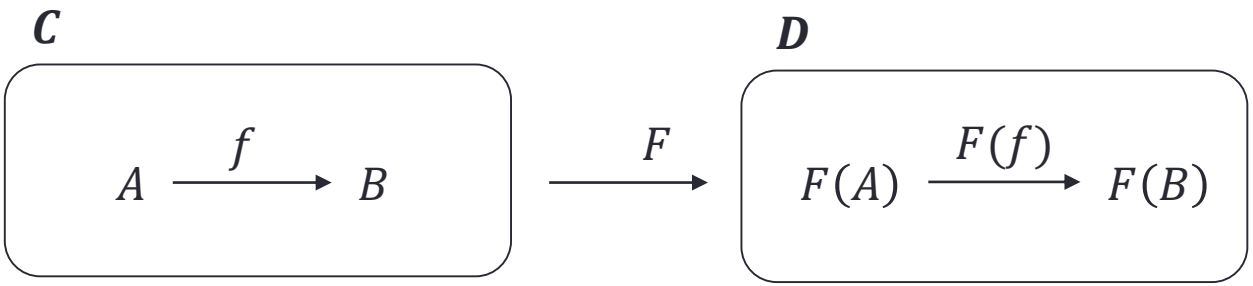
- 圏 $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$
  - 対象：圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ への関手
  - 射：関手間の自然変換





共変関手と反変関手

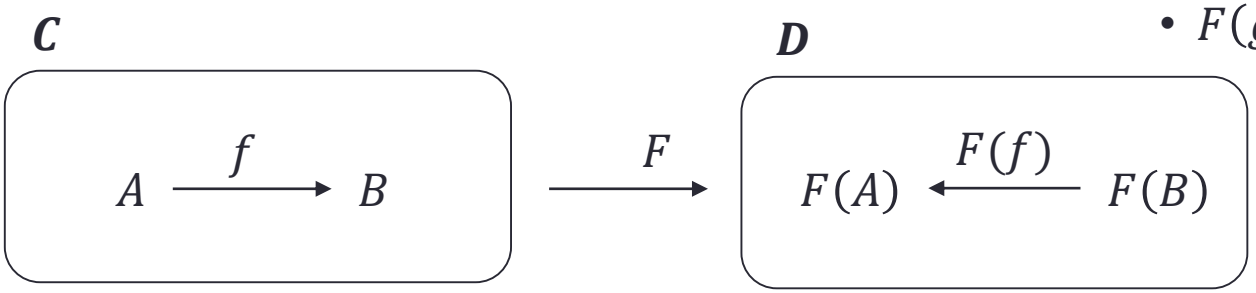
- 共変関手（covariant functor）
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f: A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f): F(A) \to F(B) \in \boldsymbol{D}$



- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

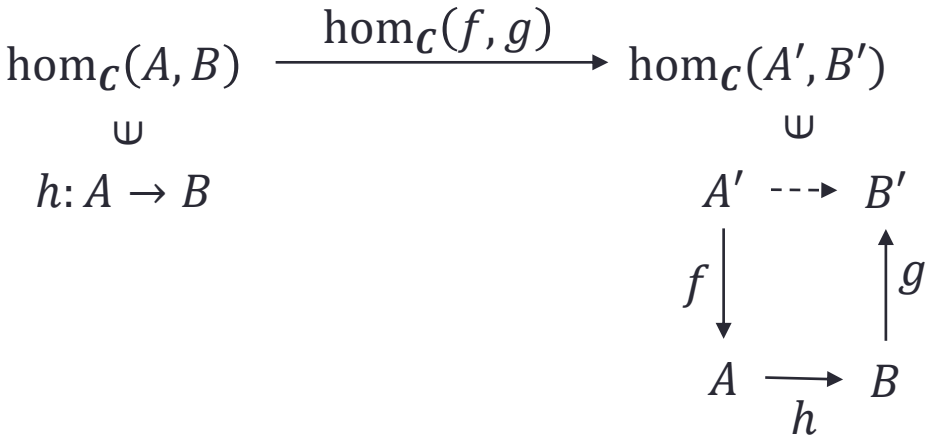
- 反変関手（contravariant functor）
  - 対象 $A \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(A) \in \boldsymbol{D}$
  - 射 $f: A \to B \in \boldsymbol{C}$ に対して，$F(f): F(B) \to F(A) \in \boldsymbol{D}$

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$



Hom関手

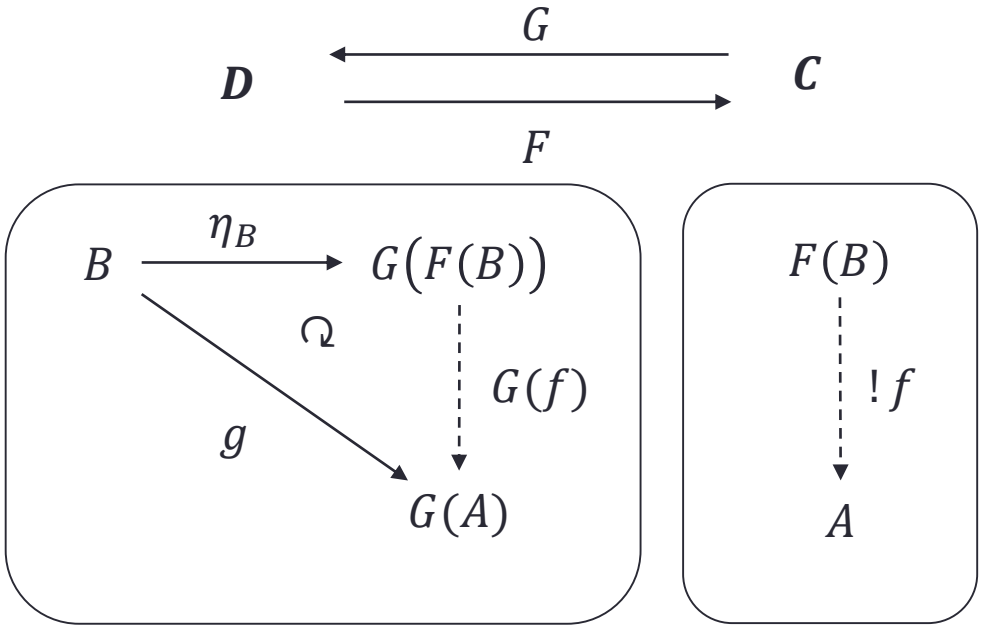
- 圏 $\boldsymbol{C}$ に対して，その射の集合を対応させる関手
- $\hom_{\boldsymbol{C}}(-,-)\colon \boldsymbol{C}^{op} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Set}$
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(A,B)$: A から B への射の集合
  - $f\colon A' \to A$ と $g\colon B \to B'$ に対して，$\hom_{\boldsymbol{C}}(f,g)\colon \hom_{\boldsymbol{C}}(A,B) \to \hom_{\boldsymbol{C}}(A',B')$ を $\hom_{\boldsymbol{C}}(f,g)(h) = g \circ h \circ f$ で定義する.



左随伴関手(left adjoint functor)

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ の左随伴関手(left adjoint functor) $F\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ とは
  - $\boldsymbol{D}$ の対象 B に対して単位(unit)射 $\eta_B\colon B \to G\big(F(B)\big)$ が存在する.
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 A と $\boldsymbol{D}$ の射 $g\colon B \to G(A)$ に対して,

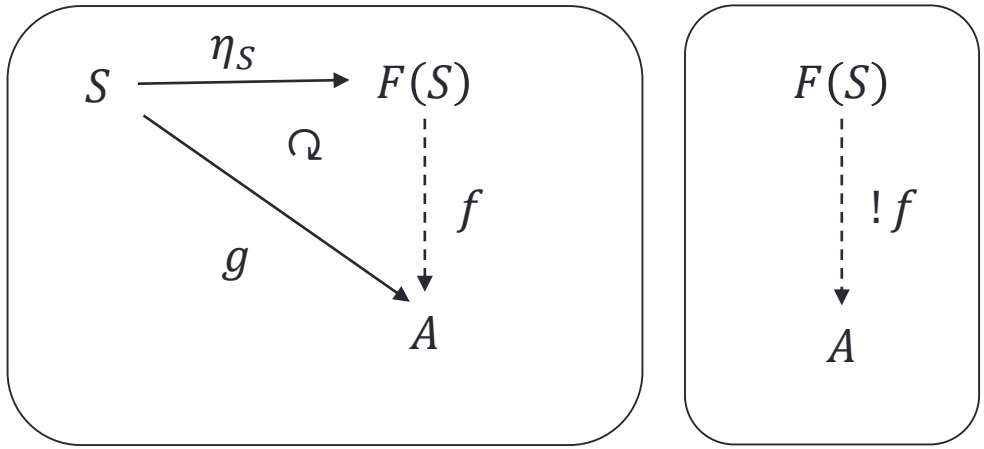
    次の図式を可換にする $\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon F(B) \to A$ が一意的に存在する.



左随伴関手の例

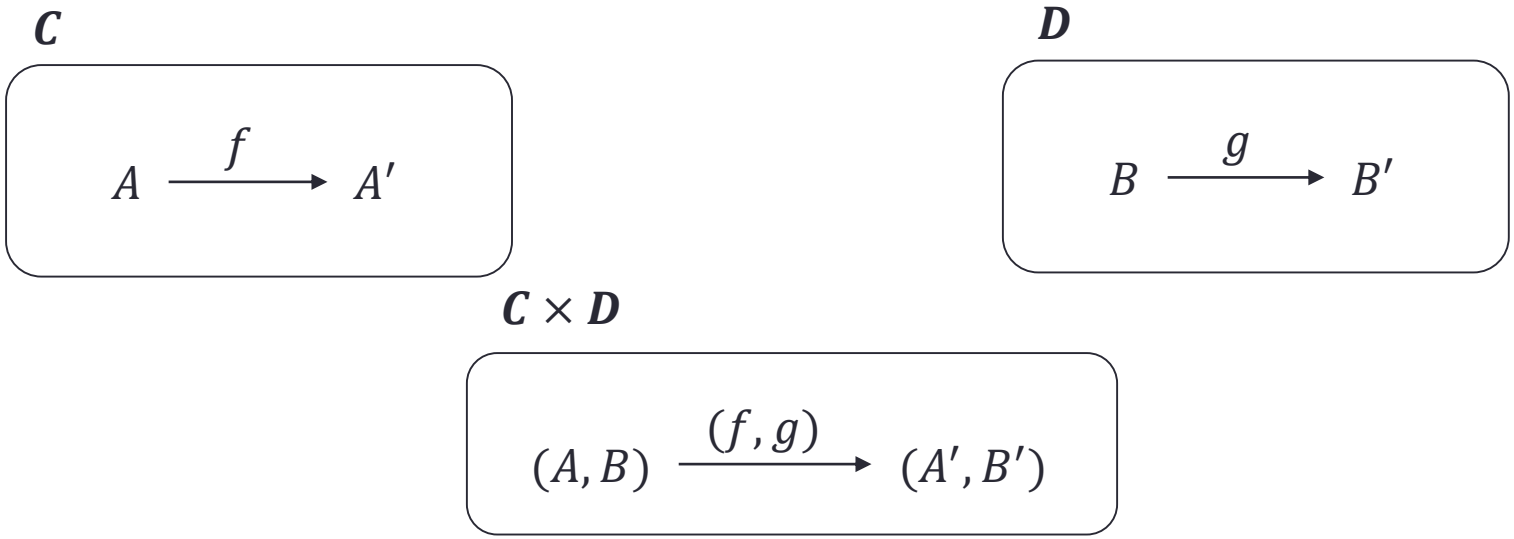
- 集合の圏 $\boldsymbol{Set}$ と半群の圏 $\boldsymbol{Semi}$ の間には，構造を忘れる忘却関手（forgetful functor)がある.
  - $G: \boldsymbol{Semi} \to \boldsymbol{Set}$
    - $G\big((S, \cdot, e)\big) = S$
    - $G(f) = f$
- G の左随伴関手が与えられた集合から生成される自由半群を対応させる自由関手（free functor）である.
  - $F: \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Semi}$
    - $F(S) = S$から生成された自由群
    - $F(f) = f$を半群の準同型に自然に拡張

- η_S は包含写像（inclusion map)



圏の積

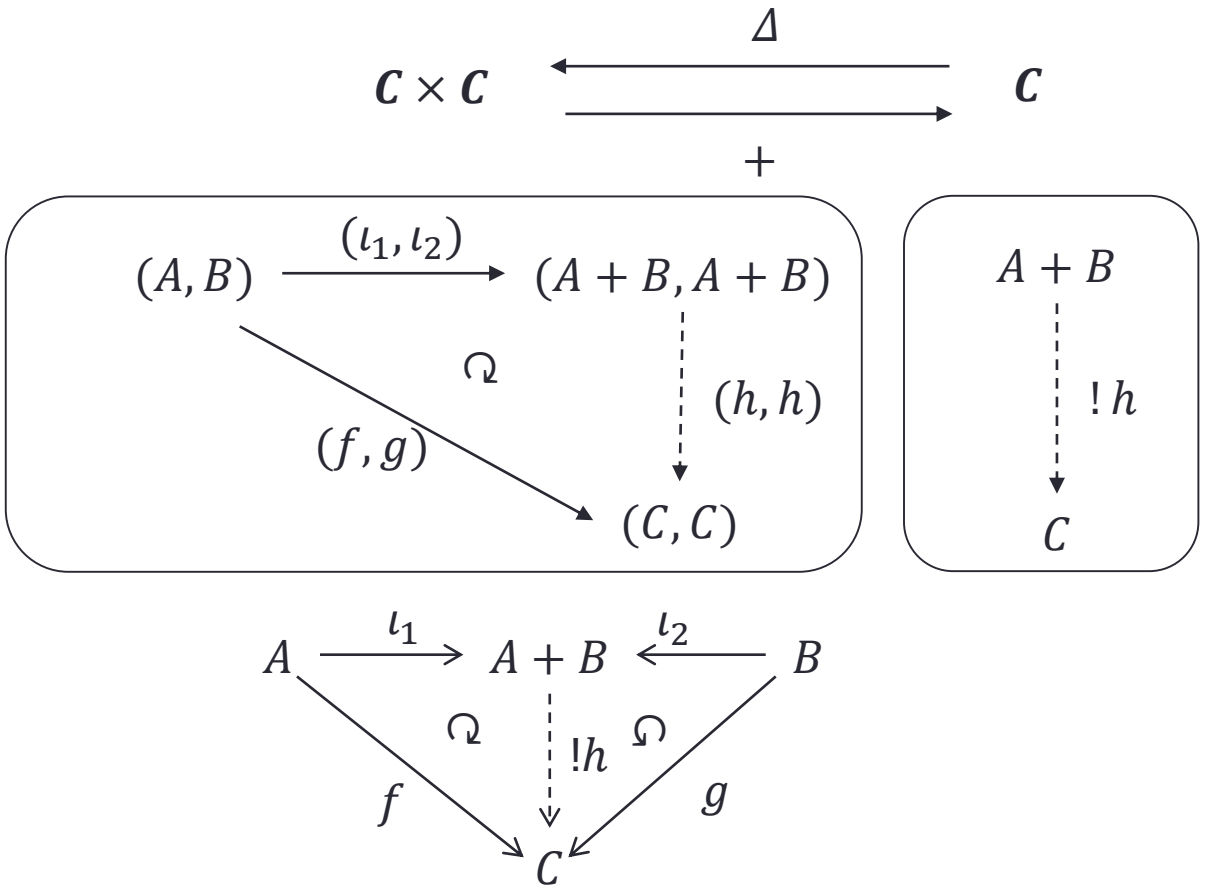
- 圏 $\boldsymbol{C}$ と 圏 $\boldsymbol{D}$ の積の圏 $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$
  - 対象: $A \in \boldsymbol{C}, B \in \boldsymbol{D}$ に対して, $(A, B) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$
  - 射: $f: A \to A' \in \boldsymbol{C}, g: B \to B' \in \boldsymbol{D}$ に対して, $(f, g): (A, B) \to (A', B') \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}$



- 圏 $\boldsymbol{C}$ と 圏 $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ への対角線関手 $\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$
  - $\boldsymbol{\Delta}(A) = (A, A)$
  - $\Delta(f) = (f, f)$

直和は対角線関手の左随伴関手

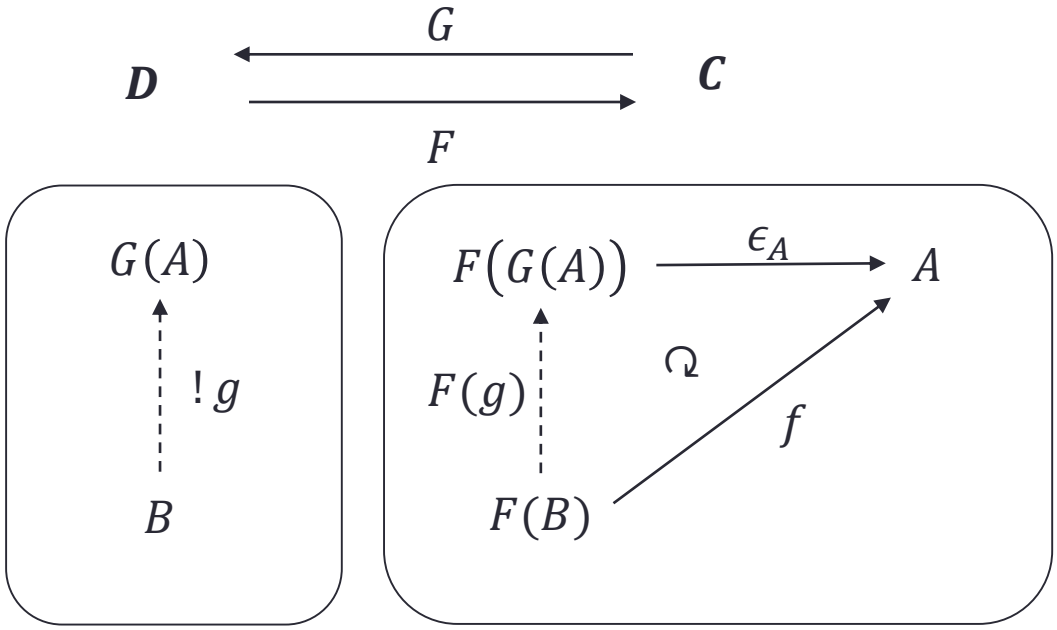
- 対角線関手 $\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ の左随伴関手は直和 $+: \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ になる.



右随伴関手（right adjoint functor）

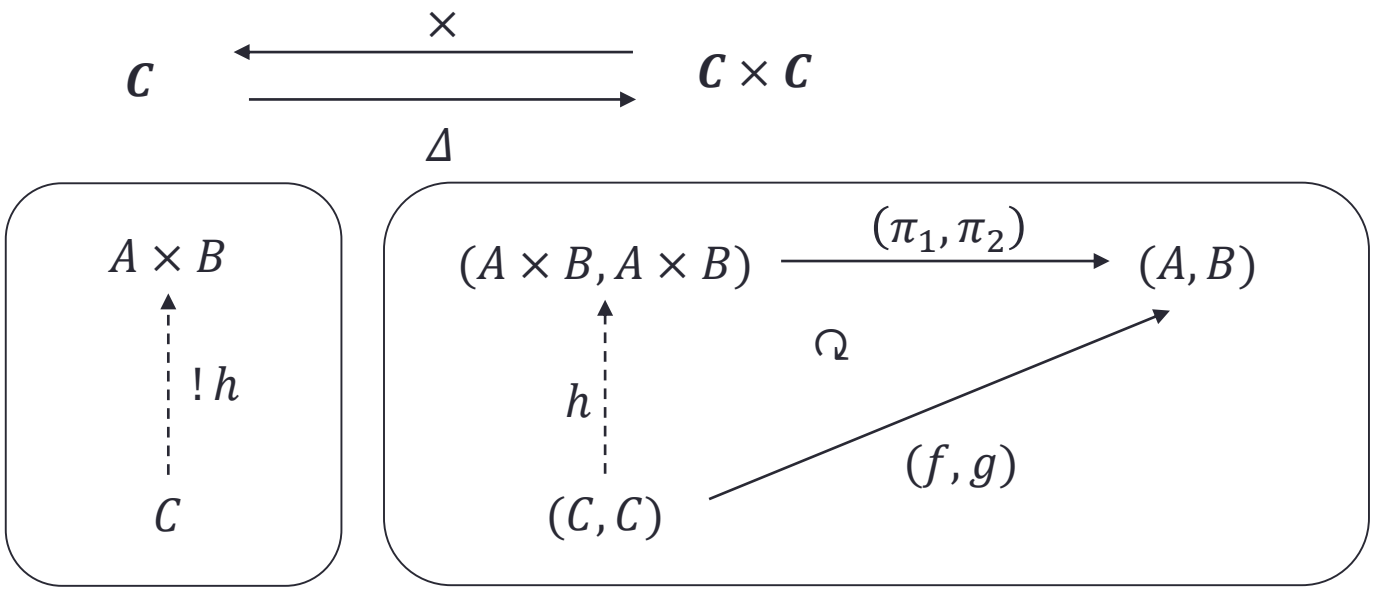
- 圏 $\boldsymbol{C}$ から圏 $\boldsymbol{D}$ への関手 $F\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ の右随伴関手（right adjoint functor）$G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ とは
  - $\boldsymbol{C}$ の対象 A に対して余単位（co-unit）射 $\epsilon_A\colon F\big(G(A)\big) \to A$ が存在する.
  - $\boldsymbol{D}$ の対象 B と $\boldsymbol{C}$ の射 $f\colon F(B) \to A$ に対して,

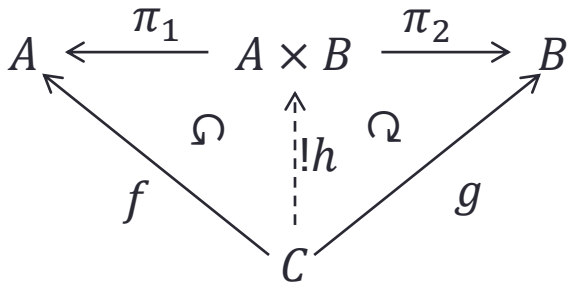
    次の図式を可換にする $\boldsymbol{D}$ の射 $g\colon B \to G(A)$ が一意的に存在する.



直積は対角線関手の右随伴関手

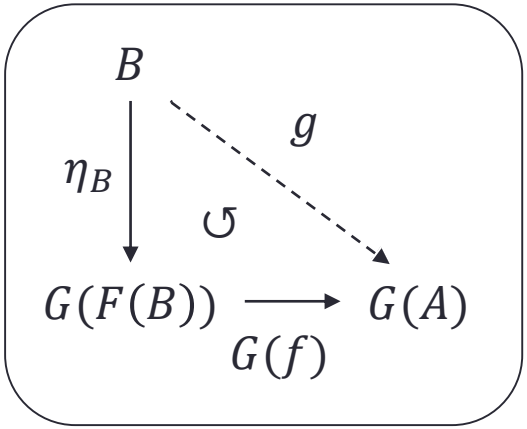
- 対角線関手 $\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ の右随伴関手は直積 $\times: \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ になる.

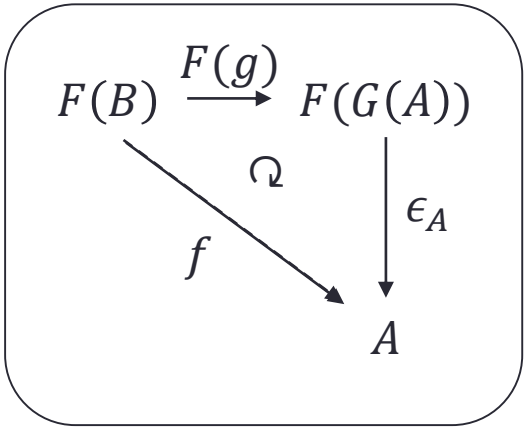




左随伴関手と右随伴関手

- 左随伴関手
  - 圏 $\boldsymbol{D}$ の $g: B \to G(A)$ に対して，圏 $\boldsymbol{C}$ の $f: F(B) \to A$ が一意的に決まる
- 右随伴関手
  - 圏 $\boldsymbol{C}$ の $f: F(B) \to A$ に対して，圏 $\boldsymbol{D}$ の $g: B \to G(A)$ が一意的に決まる

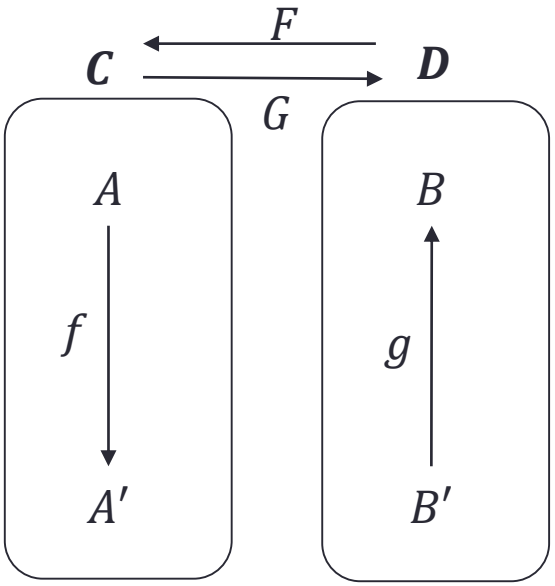




$$\hom_{\boldsymbol{D}}\big(B, G(A)\big) \cong \hom_{\boldsymbol{C}}(F(B), A)$$

随伴（adjunction）

- 圏 $\boldsymbol{C}$ から 圏 $\boldsymbol{D}$ の随伴（adjunction）
  - 左随伴関手（left adjoint functor）$F\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$
  - 右随伴関手（right adjoint functor）$G\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(F(B), A) \simeq \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B, G(A)\big)$ が $A \in \boldsymbol{C}$ と $B \in \boldsymbol{D}$ に対して自然な同型となっている.
  - $F \dashv G$ と書かれる

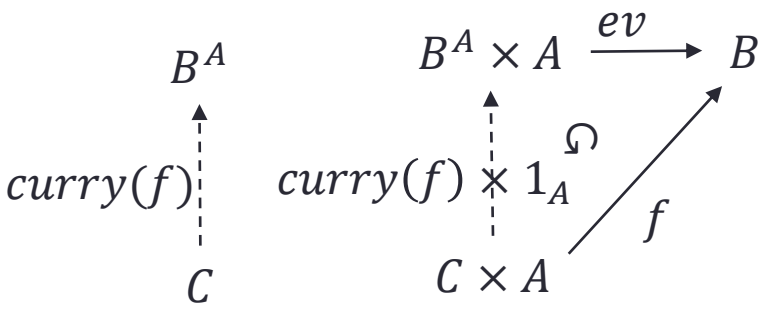


$$\hom_{\boldsymbol{C}}(F(-), -) \simeq \hom_{\boldsymbol{D}}\big(-, G(-)\big) : \boldsymbol{D}^{op} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} \hom_{\boldsymbol{C}}(F(B), A) & \xleftrightarrow{\cong} & \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B, G(A)\big) \\ \Big\downarrow \hom_{C}(F(g), f) & \circlearrowleft & \Big\downarrow \hom_{D}\big(g, G(f)\big) \\ \hom_{\boldsymbol{C}}(F(B'), A') & \xleftrightarrow{\cong} & \hom_{\boldsymbol{D}}\big(B', G(A')\big) \end{array}$$

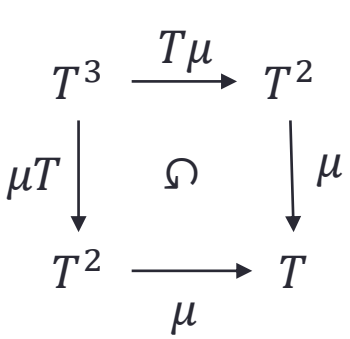
すべては随伴

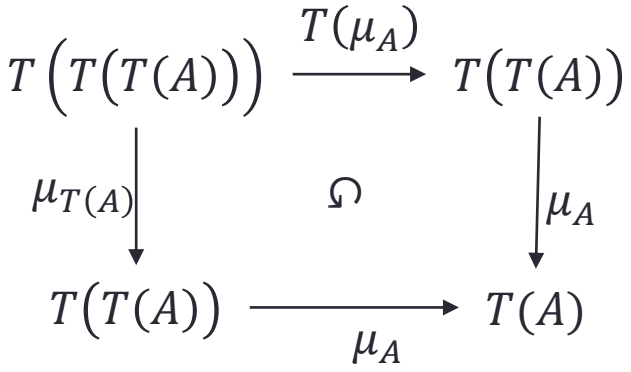
- $\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ を $\Delta(A) = (A, A)$ とする対角線関手とすると
  - $+ \dashv \Delta \dashv \times$
  - 直和は Δ の左随伴関手
  - 直積は Δ の右随伴関手
- $! : \boldsymbol{C} \to \cdot$ を $!(A) = \cdot$ とする関手とすると
  - 始対象は $!$ の左随伴関手
  - 終対象は $!$ の右随伴関手
  - ここで，$\cdot$ は対象が1つ，射が恒等射だけの圏
- $\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{C}$ の部分圏としたとき，$\Delta: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{D}}$ を $\Delta(A)(B) = (A)$, $\Delta(A)(f) = 1_A$ とする関手とすると
  - 余極限 $\varinjlim \boldsymbol{D}$ は Δ の左随伴関手
  - 極限 $\varprojlim \boldsymbol{D}$ は Δ の右随伴関手
- $(-) \times A: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ の右随伴関手 $(-)^A: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ が関数空間
  - $\hom_{\boldsymbol{C}}(C \times A, B) \simeq \hom_{\boldsymbol{C}}(C, B^A)$



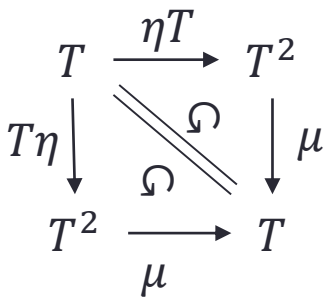
モナド（Monad）

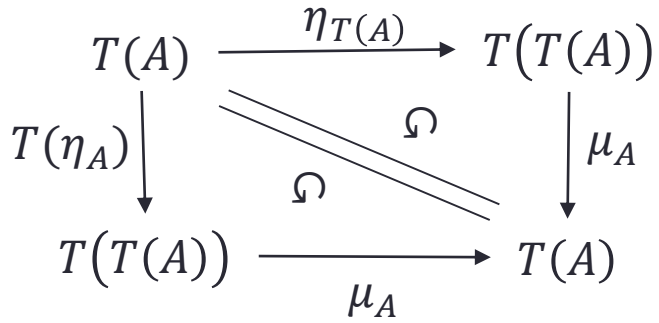
- 圏 $\boldsymbol{C}$ 上のモナドは関手 $T: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ と2つの自然変換 $\eta: 1_{\boldsymbol{C}} \dot{\to} T$ と $\mu: T^2 \dot{\to} T$ からなり，次の条件をみたす：
  - $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
  - $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$





半群の結合法則





半群の単位元の存在

- $F \dashv G$ のとき $T = G \circ F$ はモナドである.

Haskellのモナド

```
class Monad m where
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
```

- Monad クラスのインスタンスがモナド
  - 2つの関数を実装する必要がある.
  - (>>=) は**バインド**（bind）と呼ばれる

- 2つの関数は次の規則を満たしている必要がある.
  - **モナド則**

```
1. (return x) >>= f    = f x
2. m >>= return        = m
3. (m >>= f) >>= g     = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

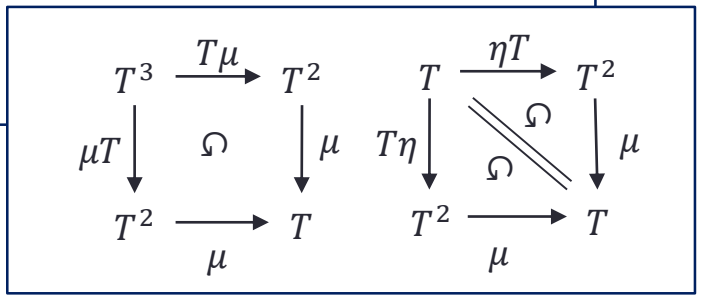
Haskellのモナドと圏のモナドの対応

```
class Monad m where
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
```

```
1. (return x) >>= f    = f x
2. m >>= return        = m
3. (m >>= f) >>= g     = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

圏 $\boldsymbol{C}$ 上のモナドは関手 $T: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ と2つの自然変換 $\eta: 1_{\boldsymbol{C}} \dot{\to} T$ と $\mu: T^2 \dot{\to} T$ からなり，次の条件をみたす：

- $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
- $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$

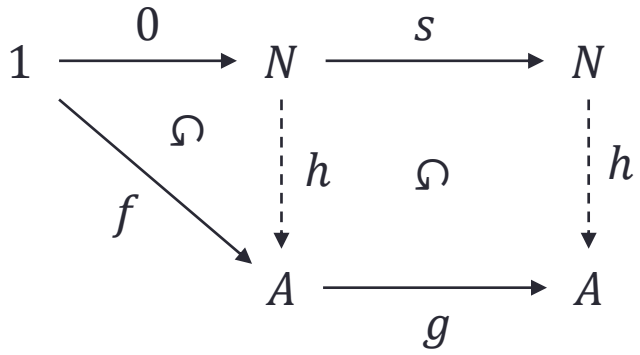


- **`return::a -> m a`** is
  - $\eta_A: A \to T(A)$
- **`(>>=)::m a -> (a -> m b) -> m b`** is
  - $f: A \to T(B)$ が与えられたとき $T(f): T(A) \to T\big(T(B)\big)$ となるので $\mu_B: T\big(T(B)\big) \to T(B)$ と組み合わせた $\mu_B \circ T(f): T(A) \to T(B)$ を対応させるもの．
  - $\big(A \to T(B)\big) \to \big(T(A) \to T(B)\big) \equiv T(A) \to \big(A \to T(B)\big) \to T(B)$

自然数対象（Natural Number Object）

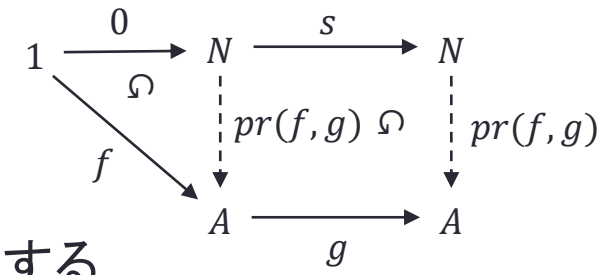
- N が**自然数対象**（Natural Number Object）であるとは
  - 2つの射がある
    - $0: 1 \to N$
    - $s: N \to N$
  - $f: 1 \to A, g: A \to A$ に対して，$h: N \to A$ が唯一存在し
    - $h \circ 0 = f$
    - $h \circ s = g \circ h$

    となる．

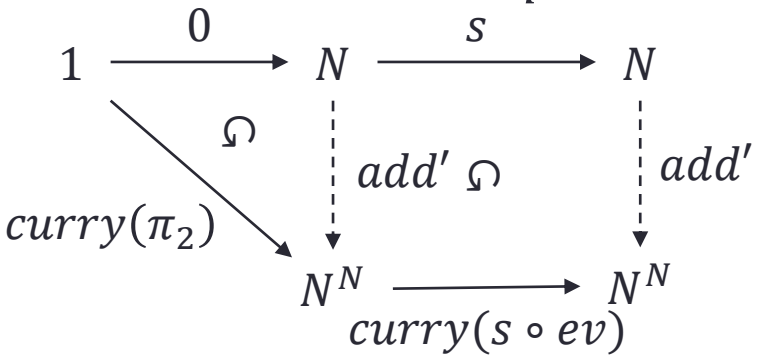


  - h を $pr(f, g)$ と書くことにする．

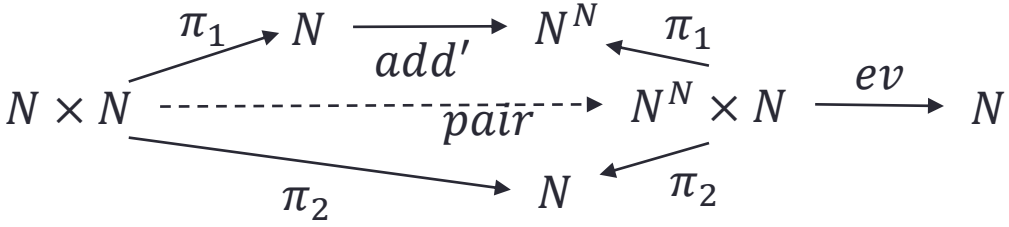
足し算の射の構成

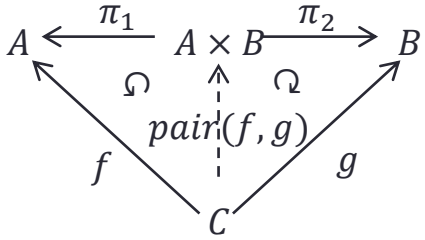


- $add: N \times N \to N$ の定義
  - カリー化した $add': N \to N^N$ を pr を使って構成する.



  - $\pi_2: 1 \times N \to N$ をカリー化すると $curry(\pi_2): 1 \to N^N$
  - $s \circ ev: N^N \times N \to N$ をカリー化すると $curry(s \circ ev): N^N \to N^N$
  - $add' = pr\big(curry(\pi_2), curry(s \circ ev)\big)$

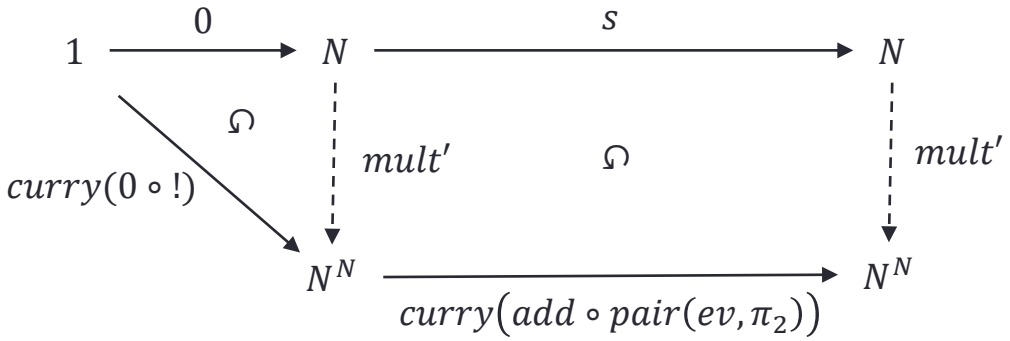




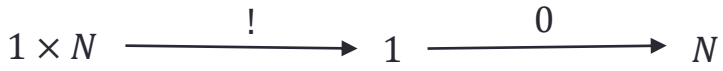
  - $add = ev \circ pair\big(pr\big(curry(\pi_2), curry(s \circ ev)\big) \circ \pi_1, \pi_2\big)$

掛け算の射の構成

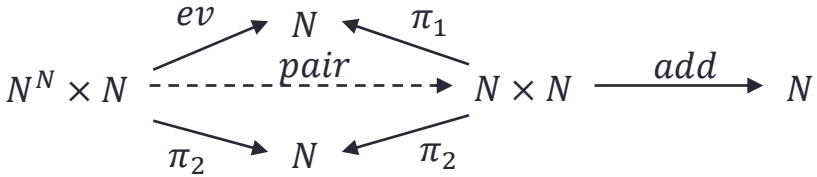
- $mult: N \times N \to N$ の定義
  - カリー化した $mult': N \to N^N$ を pr と add を使って構成する.



  - $0 \circ !: F \times N \to N$ をカリー化すると $curry(0 \circ !): F \to N^N$



  - $add \circ pair(ev, \pi_2): N^N \times N \to N$ をカリー化すると $curry\big(add \circ pair(ev, \pi_2)\big): N^N \to N^N$



  - $mult' = pr\left(curry(0 \circ !), curry\big(add \circ pair(ev, \pi_2)\big)\right)$
  - $mult = ev \circ pair\left(pr\left(curry(0 \circ !), curry\big(add \circ pair(ev, \pi_2)\big)\right) \circ \pi_1, \pi_2\right)$

まとめ

- 極限と余極限
  - 部分カテゴリー
  - すべては極限と余極限
  - equalizer, co-equalizer
  - pullback, pushout
- 関手
  - 共変関手と反変関手
  - 自然変換
- 随伴
  - 右随伴関手と左随伴関手
  - 対角線関手と直積と直和
  - 極限と随伴
  - モナド
- 自然数対象