

# 情報数学

## 第8回 完全半順序

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

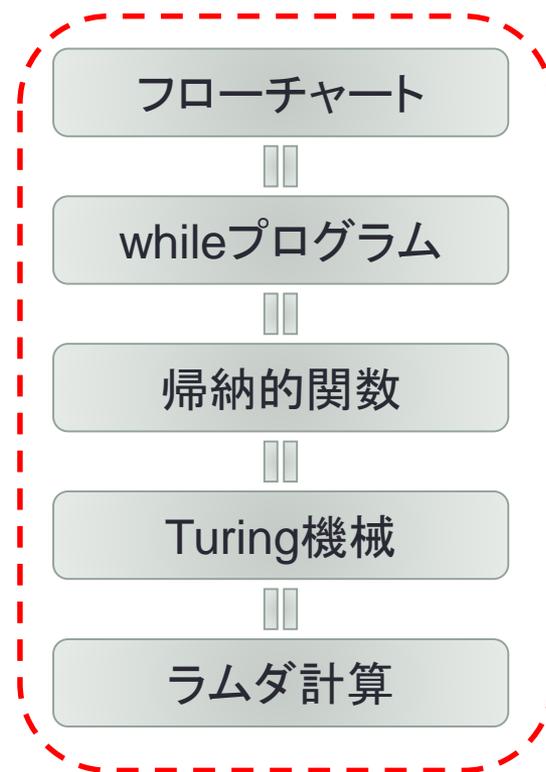
# これまで

## • 計算

- フローチャート
- whileプログラム
- 帰納的関数
  - 原始帰納的関数
  - 最小解演算子
- Turing機械
  - 決定不能問題
- ラムダ計算
  - 関数抽象
  - 関数適用
  - $\lambda$  表現

## • $\lambda$ 式

- 関数抽象と適用をモデル
- どんな関数なのか？
- $\lambda x. x x$
- $x$  は関数であり値でもある.



# ラムダ計算のモデル

## • $\lambda$ 式の意味

- $\Lambda = \{M \mid M \text{ は } \lambda\text{式}\}$
- $M$  の意味
  - $\llbracket M \rrbracket$
  - $M$  の表示 (denotation)

## • $\llbracket \cdot \rrbracket: \Lambda \rightarrow D$

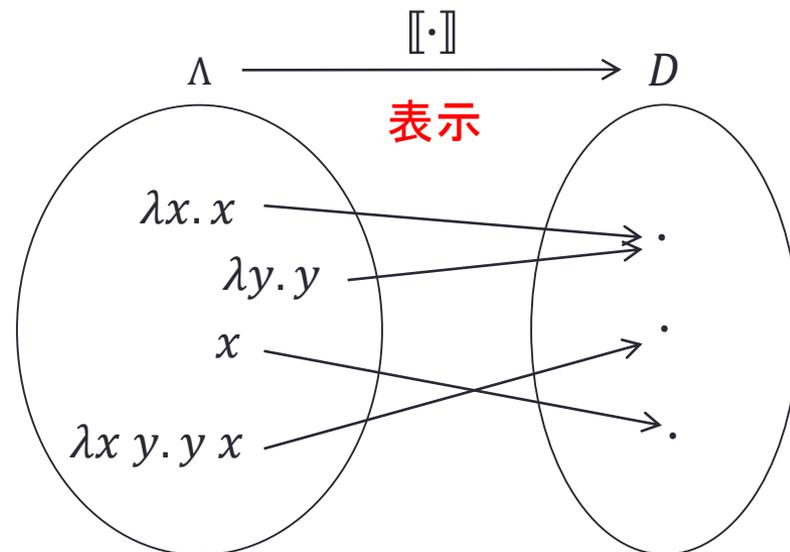
- $\lambda$ 式に意味 ( $D$  の値) を対応させる.
- $\llbracket \lambda x. M \rrbracket = \lambda x. \llbracket M \rrbracket$
- $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket(\llbracket N \rrbracket)$

## • $D$ の性質

- $\llbracket \lambda x. M \rrbracket \in D \rightarrow D$ 
  - $D \rightarrow D \subseteq D$
- $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket(\llbracket N \rrbracket)$ 
  - $D \subseteq D \rightarrow D$

## • すなわち,

- $D \cong D \rightarrow D$
- $D$  の要素は関数である.
- 1点集合以外に存在しない.

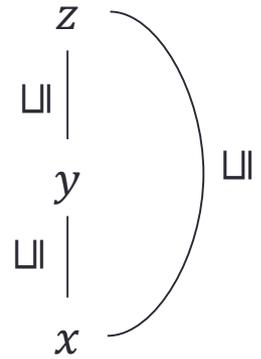


# 情報の数学的性質1

- 情報には大小関係がある。
  - 「SFCは神奈川県にある」
  - 「SFCは関東にある」
  - 「SFCは藤沢市にある」
- 数字の大小と同じ？
  - 「SFCは神奈川県にある」
  - 「SFCは慶応大学のキャンパスである」
- すべての情報同士が比較できるわけではない。

# 順序関係

- $\sqsubseteq$  が集合  $D$  上の **順序関係**:
  - 反射律 (reflective):  $x \sqsubseteq x$
  - 推移律 (transitive):  $x \sqsubseteq y$  かつ  $y \sqsubseteq z$  ならば  $x \sqsubseteq z$
  - 反対称律 (antisymmetric):  $x \sqsubseteq y$  かつ  $y \sqsubseteq x$  ならば  $x = y$
- $(D, \sqsubseteq)$  は **半順序集合** (partially ordered set) である
  - $\sqsubseteq$  は半順序
- 情報は半順序集合である.
  - **全順序集合** (totally ordered set) ではない.
  - 完全性 (totality):  $x \sqsubseteq y$  あるいは  $y \sqsubseteq x$  のどちらかが成り立つ.
- 半順序集合であるのはどれ?
  - 自然数の  $x \leq y$
  - 整数の  $x \leq y$
  - 自然数の  $x < y$
  - 集合の包含関係の  $A \subseteq B$
  - 友達関係



# 情報の数学的性質2

- 情報には最小の情報がある.

- なにもない情報
- なにも知らない

- $\perp$  が**最小元**である:

- どんな  $x$  に対しても  $\perp \sqsubseteq x$



- 次の半順序集合の最小元は？

- 自然数の  $x \leq y$
- 整数の  $x \leq y$
- 集合の包含関係の  $A \subseteq B$

# 最大元は？

- $\top$  が**最大元**である：
  - どのような  $x$  に対しても  $x \sqsubseteq \top$

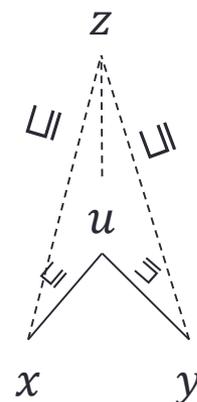


- 最大の情報とは？
  - なんでもかんでも
  - すべての情報をあわせたもの
  - わけが分からない
  - 矛盾

# 情報の数学的性質3

- 複数の情報をあわせる.
  - ①「SFCは藤沢市にある」
  - ②「SFCは慶應大学のキャンパスである」
  - ③「SFCは藤沢市にある慶應大学のキャンパスである」

①  $\sqsubseteq$  ③ かつ ②  $\sqsubseteq$  ③
- ③は①と②の**上限**になっている.
- $u$  が  $x$  と  $y$  の**上限** (least upper bound) であるとは:
  - $x \sqsubseteq u$  かつ  $y \sqsubseteq u$
  - もし  $z$  が  $x \sqsubseteq z$  かつ  $y \sqsubseteq z$  を満たすなら,  $u \sqsubseteq z$  である.
  - $x \sqcup y$  と書く.
  - $x$  と  $y$  より大きい要素の中で最も小さいもの.
  - 上限は存在すれば一意的.
- 次の半順序集合において上限とは何か?
  - 自然数の  $x \leq y$
  - 集合の包含関係の  $A \subseteq B$



# 完備束 (Complete Lattice)

- $\sqcup A$  が集合  $A$  の上限であるとは:
  - $x \in A$  に対して  $x \sqsubseteq \sqcup A$
  - もし  $z$  がすべての  $x \in A$  に対して  $x \sqsubseteq z$  となるなら,  $\sqcup A \sqsubseteq z$
- $\sqcup \{x, y\} = x \sqcup y$
- $A$  の上限と  $A$  の最大元は異なる.
  - $\{0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots\}$
  - $A$  の最大元は  $A$  の要素でなくてはならない.
- $(D, \sqsubseteq)$  が**完備束** (complete lattice) であるとは:
  - 任意の集合  $A$  の上限  $\sqcup A$  が存在する.

# 完備束の性質

- 完備束には必ず最小元がある.
  - $\perp = \sqcup \emptyset$
- 完備束は任意の集合の**下限** (greatest lower bound) がある.
  - $\sqcap A$  が集合  $A$  の下限であるとは:
    - 任意の  $x \in A$  に対して  $\sqcap A \sqsubseteq x$
    - もし  $z$  が任意の  $x \in A$  に対して  $z \sqsubseteq x$  となれば,  $z \sqsubseteq \sqcap A$
  - $\sqcap A = \sqcup \{z \in D \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } z \sqsubseteq x\}$
- 完備束には必ず最大元がある.
  - $\top = \sqcap \emptyset$
- 情報の集合は完備束か？

## 完全半順序集合 (Complete Partial Ordered Set)

- 半順序集合  $(D, \sqsubseteq)$  が**完全半順序集合** (complete partial ordered set, cpo) であるとは:
  - 最小元  $\perp$  がある.
  - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \dots$ , となる要素列に対して上限  $\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i$  がある.
- 最大元があるとは限らない.
- 情報の集合は完全半順序集合である.**



# 例

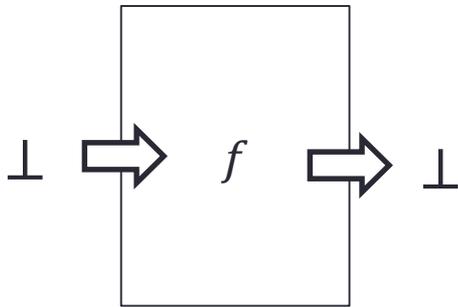
- 集合の包含関係  $A \subseteq B$
- 完備束
- **平坦領域** (flat domain) :
  - 集合  $S$  に最小元  $\perp$  を追加する.
    - $x \in S$  に対して  $\perp \sqsubseteq x$
  - 平坦領域は完全半順序集合である.
- 真偽値の集合  $B = \{tt, ff\}$  の平坦領域は:

$$B_{\perp} = \left[ \begin{array}{cc} tt & ff \\ & \perp \end{array} \right]$$

# プログラムは関数である

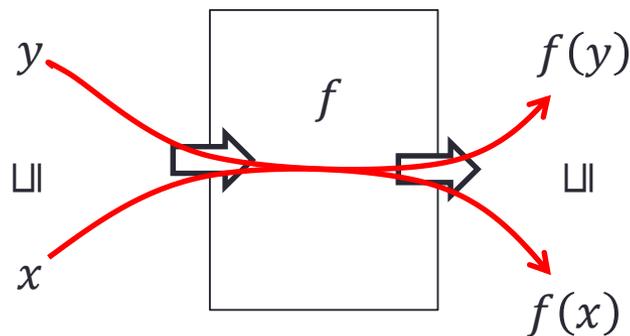
- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は  $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$  に対してどうする?

(1)  $f(\perp) = \perp$



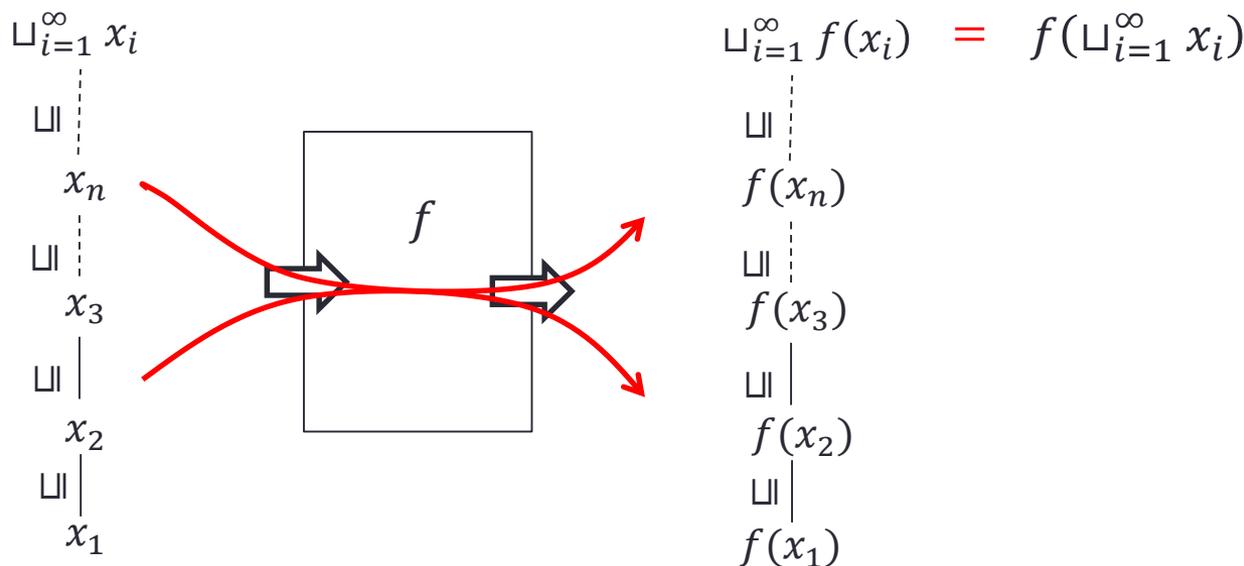
# プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は  $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$  に対してどうする?
  - (1)  $f(\perp) = \perp$
  - (2)  $x \sqsubseteq y$  ならば  $f(x) \sqsubseteq f(y)$



# プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は  $\perp$ ,  $\sqsubseteq$ ,  $\sqcup$  に対してどうする?
  - (1)  $f(\perp) = \perp$
  - (2)  $x \sqsubseteq y$  ならば  $f(x) \sqsubseteq f(y)$
  - (3)  $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$  に対して  $f(\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$



# プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は  $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$  に対してどうする?
  - (1)  $f(\perp) = \perp$
  - (2)  $x \sqsubseteq y$  ならば  $f(x) \sqsubseteq f(y)$
  - (3)  $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$  に対して  $f(\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$
- $f$  が(2)を満たすとき,  $f$  は**単調**(monotonic)関数である.
- $f$  が(2)と(3)を満たすとき,  $f$  は**連続**(continuous)関数である.
- $f$  が(1)を満たすとき,  $f$  は**正格**(strict)である.
- **プログラムは連続である.**

# 最小元の正体

- 最小元  $\perp$  の意味は？
  - 情報がない
  - メモリはクリアされた状態
  - 計算の最初
  - まだ計算が始まっていない
- プログラムが  $\perp$  を返す意味：
  - 答えがない.
  - 計算が終わらない.
  - 結果は未定義である.
- プログラムに  $\perp$  を渡す意味：
  - なにも情報がないが計算して！
  - この値を使うな.
- 正格な関数とは？
  - プログラムは常に正格か？

# 連続関数の例(1)

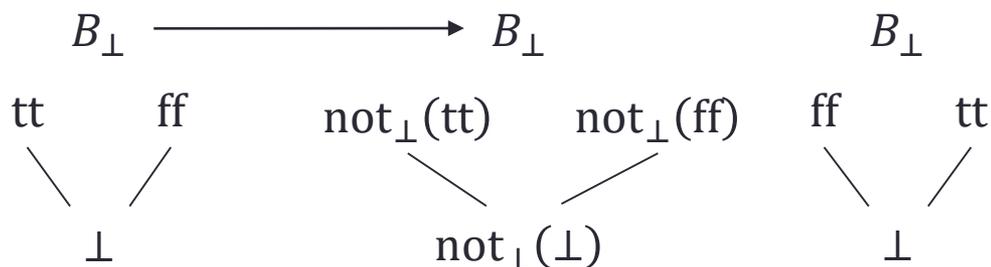
- $B = \{tt, ff\}$
- $\text{not}: B \rightarrow B$ 
  - $\text{not}(tt) = ff$
  - $\text{not}(ff) = tt$



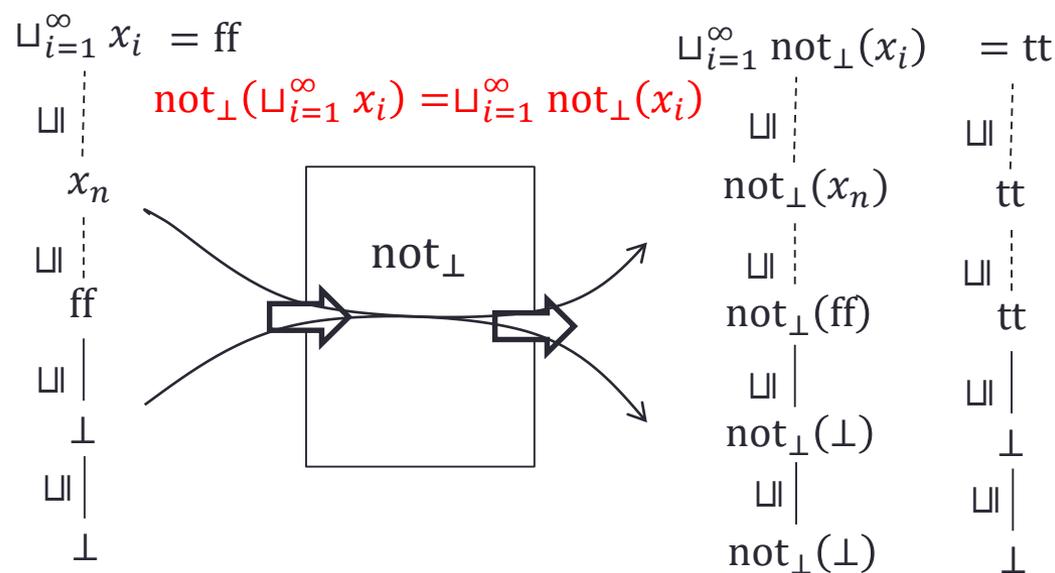
- $\text{not}_\perp: B_\perp \rightarrow B_\perp$ 
  - $\text{not}_\perp(tt) = ff$
  - $\text{not}_\perp(ff) = tt$
  - $\text{not}_\perp(\perp) = \perp$

## 単調

- $\perp \sqsubseteq ff$  にたいして  $\text{not}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{not}_\perp(ff)$
- $\perp \sqsubseteq tt$  にたいして  $\text{not}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{not}_\perp(tt)$

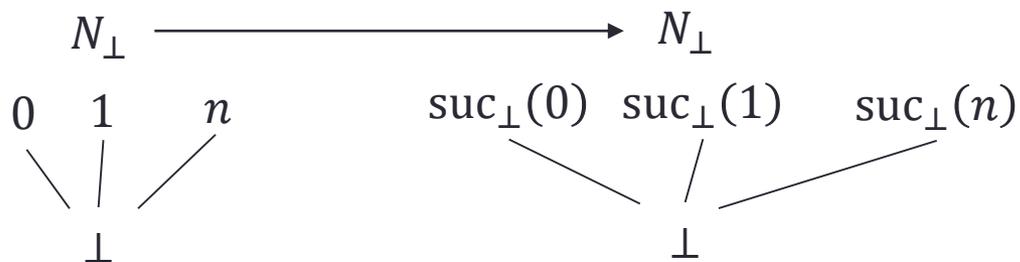


## 連続



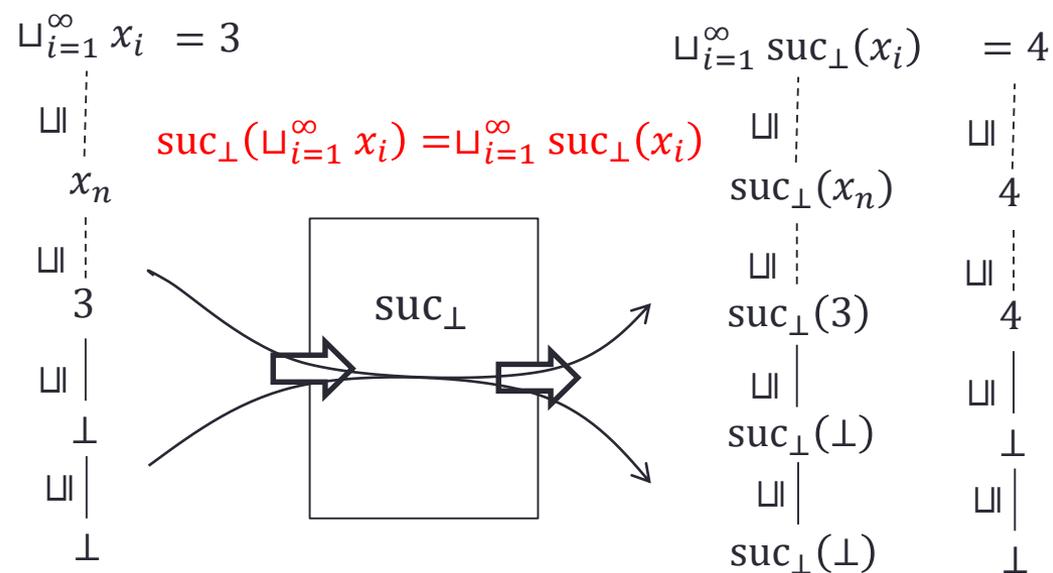
# 連続関数の例(2)

- $N = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\text{suc}: N \rightarrow N$ 
  - $\text{suc}(n) = n + 1$
- 単調
  - $\perp \sqsubseteq n$  に対して  $\text{suc}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{suc}_\perp(n)$



- $\text{suc}_\perp: N_\perp \rightarrow N_\perp$ 
  - $\text{suc}_\perp(n) = n + 1$
  - $\text{suc}_\perp(\perp) = \perp$

• 連続



# まとめ

- 完全半順序
  - 情報の集合
  - 半順序
  - 最小元
  - 上限
- 連続関数
  - 上限を保存する
  - 正格とは？