情報数学
第4回　チューリング機械

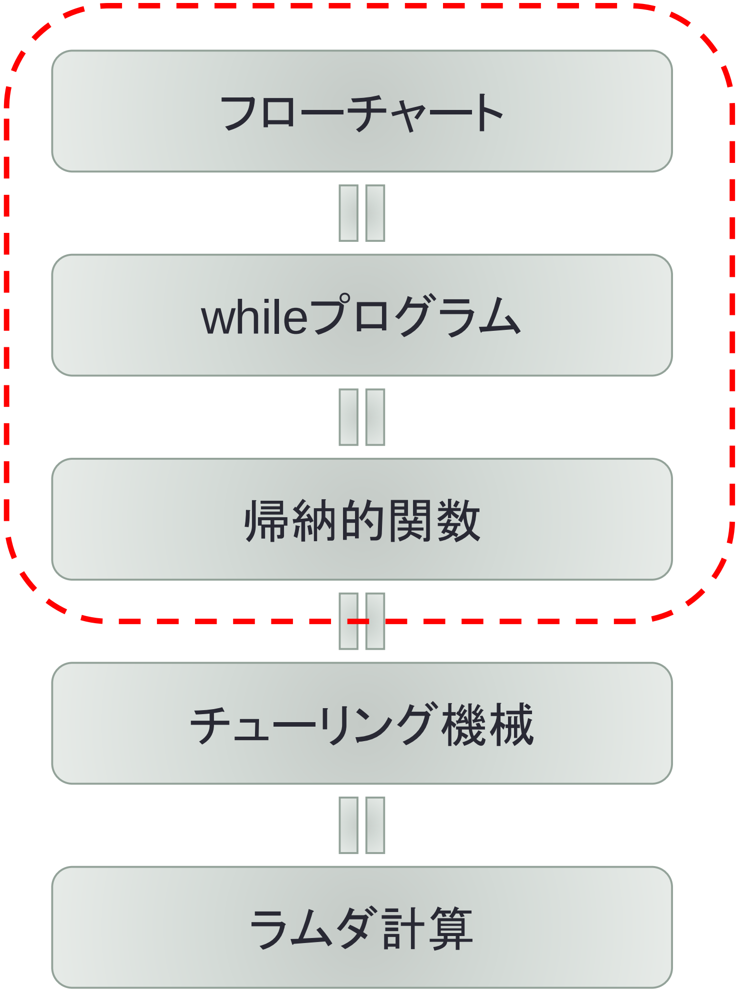
萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

先週まで

- 計算
  - フローチャート
  - whileプログラム
  - 帰納的関数
    - 原始帰納的関数
    - 最小解演算子



有限状態オートマトン

- 有限状態オートマトン（Finite State Automaton） M
  - Q　状態の集合（有限個，空でない）
  - Σ　入力される文字の集合（有限個，空でない）
  - δ　状態遷移関数．$\delta: Q \times \Sigma \to Q$
  - q_0　初期状態．$q_0 \in Q$
  - F　終了状態の集合．Q の部分集合（空でもよい）
- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

有限状態オートマトン例(1)

- 0 と1 からなる文字列の中に1 が偶数回出現したかどうかを調べる有限状態オートマトン

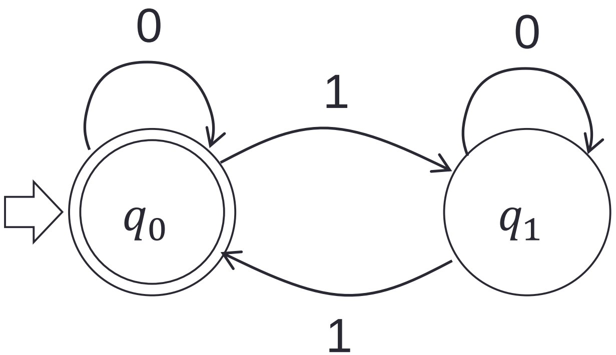
$$M_1 = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \delta_1, q_0, \{q_0\})$$

- δ_1 を次のように定義

$$\delta_1 : \{q_0, q_1\} \times \{0,1\} \to \{q_0, q_1\}$$

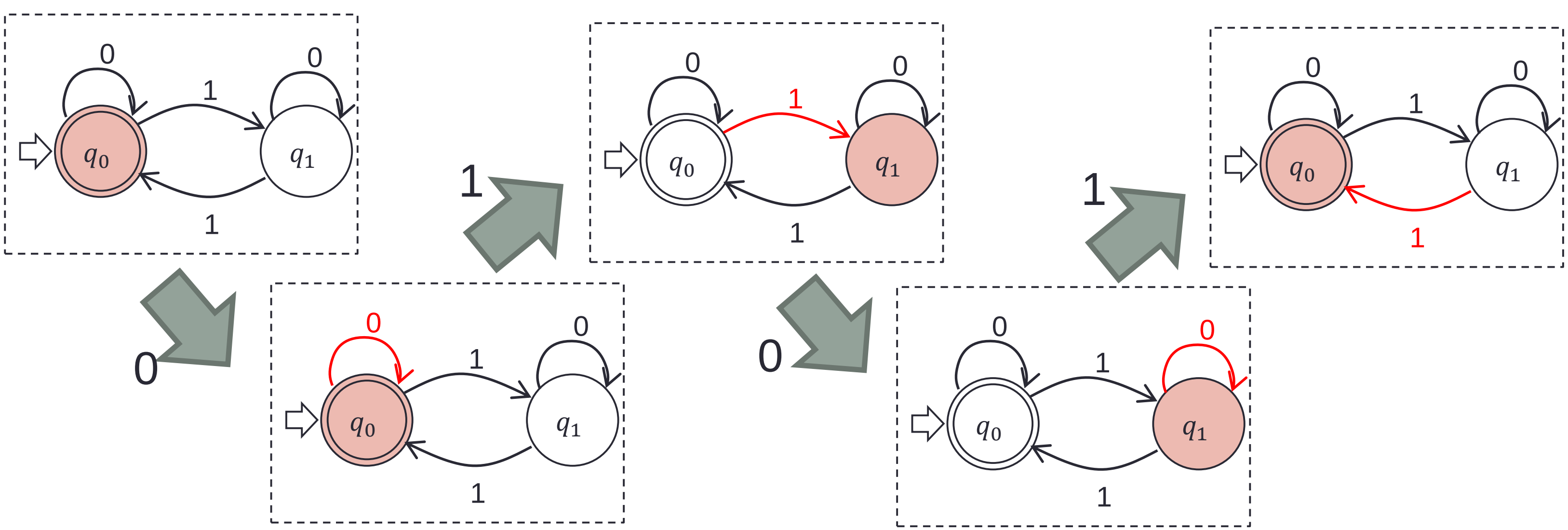
$$\begin{cases} \delta_1(q_0, 0) = q_0 \\ \delta_1(q_0, 1) = q_1 \\ \delta_1(q_1, 0) = q_1 \\ \delta_1(q_1, 1) = q_0 \end{cases}$$

δ_1	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0



状態遷移

- M_1 に 0101 を入力することを考える.
  0. 初期状態 q_0
  1. 入力 0 により状態は $\delta_1(q_0, 0) = q_0$
  2. 入力 1 により状態は $\delta_1(q_0, 1) = q_1$
  3. 入力 0 により状態は $\delta_1(q_1, 0) = q_1$
  4. 入力 1 により状態は $\delta_1(q_1, 1) = q_0$
- $q_0 \in F$ なので M_1 は 0101 を受理(accept)する.



状態遷移(一般)

- 入力の Σ の文字を受け取るごとに状態が遷移する.
  0. 初期状態は常に q_0
  1. 最初の文字 a_1 を受け取ると，状態は $\delta(q_0, a_1) = q_1$ に遷移
  2. 2番目の文字 a_2 を受け取ると，状態は $\delta(q_1, a_2) = q_2$ に遷移
  3. 3番目の文字 a_3 を受け取ると，状態は $\delta(q_2, a_3) = q_3$ に遷移

     ・・・・

  i. i番目の文字 a_i を受け取ると，状態は $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$ に遷移

     ・・・・

  n. n番目の文字 a_n を受け取ると，状態は $\delta(q_{n-1}, a_n) = q_n$ に遷移

- 有限状態オートマトン M は $q_n \in F$ であるとき，文字列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を受理する.

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} q_3 \dashrightarrow \xrightarrow{a_i} q_i \dashrightarrow \xrightarrow{a_n} q_n \overset{?}{\in} F$$

受理される言語

- 状態遷移関数 δ を文字列に拡張する.
  - $\delta(q, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \delta(\cdots \delta(\delta(\delta(q, a_1), a_2), a_3) \cdots, a_n)$
  - $\delta(q, \epsilon) = q$

  ただし. ϵ は空文字列を表す.

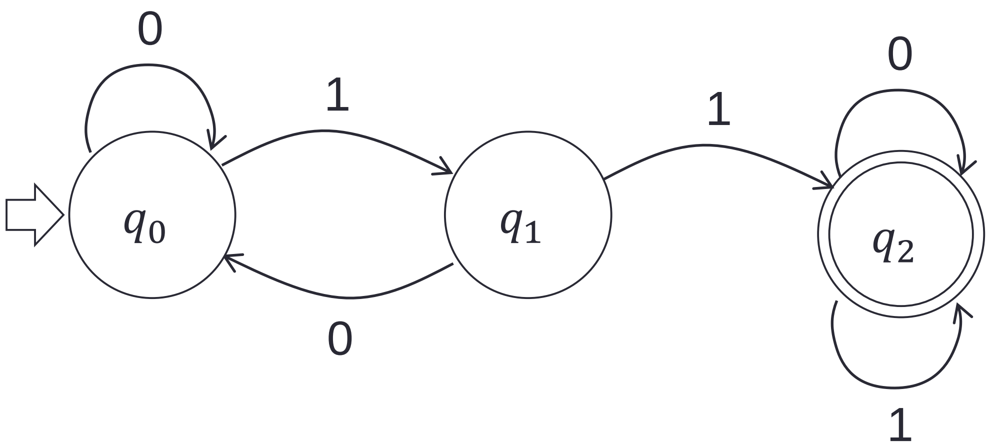
- 有限状態オートマト M は次の時に, 文字列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を受理する.
  - $\delta(q_0, a_1 a_2 \cdots a_n) \in F$

- 有限状態オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が受理する文字列の集合を, M が受理する言語という.
  - $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, x) \in F\}$

有限状態オートマトン例(2)

- 次の有限状態オートマントンの状態遷移図を書きなさい.
  - $M_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta_2, q_0, \{q_2\})$

δ_2	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

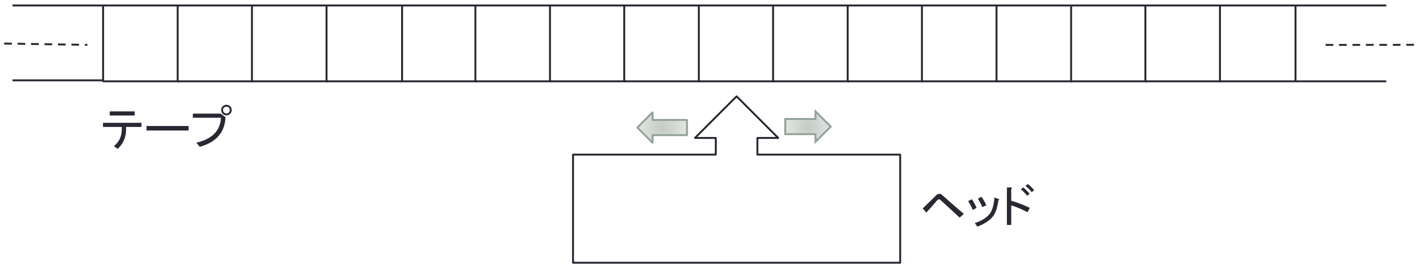


- このオートマトンが受理する言語 $L(M_2)$ は何ですか？

チューリング機械

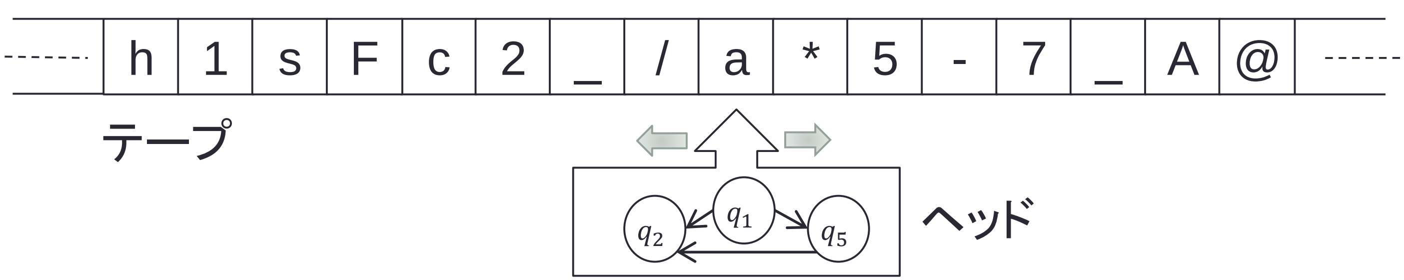
- アラン･チューリング（Alan Turing）
  - イギリスの数学者（1912 年6月23日～1954年6月7日)
  - 「On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem」1936年5月28日
    - Entscheidungsproblem = 決定問題
    - The Entscheidungsproblem =「与えられた論理式が証明可能かどうかを決定する手法はあるか」ヒルベルトが1928年に出した問題.

- チューリング機械
  - 左右無限に長いテープ
  - テープ上のデータを読み書きし，左右に動くヘッド



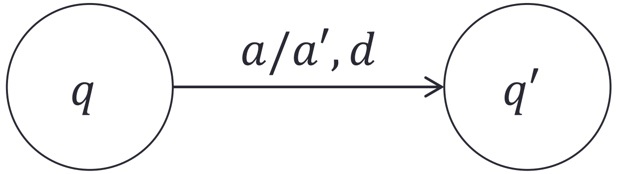
テープとヘッド

- テープ
  - 左右に無限に長いテープが1本ある.
  - テープはマスに分けられている.
  - マスには記号(文字)が書かれている.
  - 記号が書かれていない所は空白(という記号)が書かれている.
- ヘッド
  - テープの情報を読み書きするヘッドが1つある.
  - ヘッドはテープのどこかのマス上にあり, そのマスの記号を読み書きできる.
  - 内部に状態を持つ.
  - マスの記号と現在の状態から次の状態が決まる.
  - ヘッドは右が左に1つずつ移動する.



形式的定義

- チューリング機械 M は3つの (A, Q, T) からなる:
  - テープ記号の有限集合 $A = \{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, a_{m-1}\}$
    - a_0 を空白を表す記号とし「_」を使う.
  - ヘッドの内部状態の有限集合 $Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_{l-1}\}$
    - q_1 を初期状態,
    - q_0 を終了(停止)状態とする.
  - 遷移を表す関数 $T: Q \times A \to Q \times A \times \{L, R, N\}$
    - 内部状態が q で, 現在のテープ記号が a のとき,
    - $T(q, a) = (q', a', d)$ であれば,
      - 次の状態は q' となり,
      - テープ記号は a から a' に書き換え,
      - $d = L$ ならば, ヘッドは左に1つ移動し,
      - $d = R$ ならば, ヘッドは右に1つ移動し,
      - $d = N$ ならば, ヘッドは移動せずに同じ場所にいる.

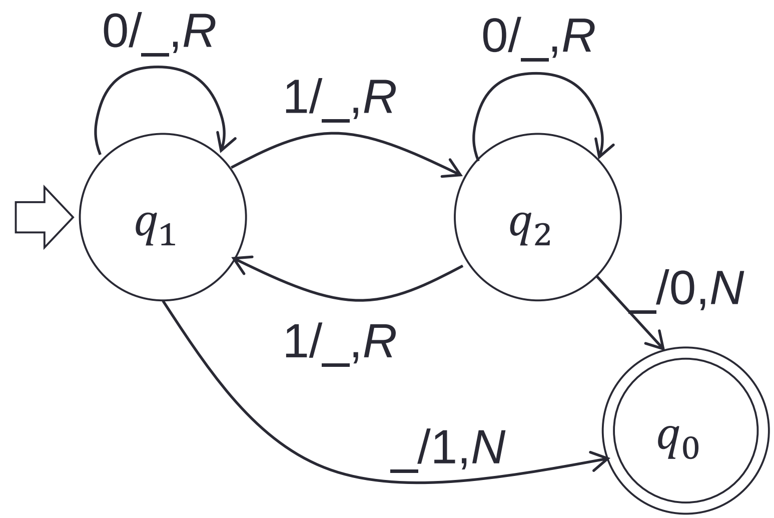


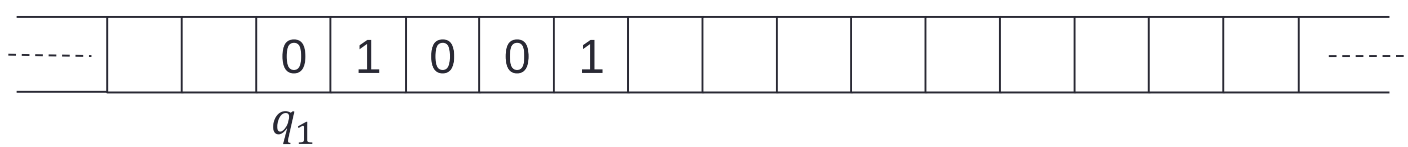
チューリング機械の例(1)

- 偶数個の「1」がテープ上に書かれていれば「1」を書き，そうでなければ「0」を書いて停止する(もとの記号はテープから消す).

$$M_3 = (\{\_, 0, 1\}, \{q_0, q_1, q_2\}, T_3)$$

T_3	_	0	1
q_1	$(q_0, 1, N)$	$(q_1, \_, R)$	$(q_2, \_, R)$
q_2	$(q_0, 0, N)$	$(q_2, \_, R)$	$(q_1, \_, R)$



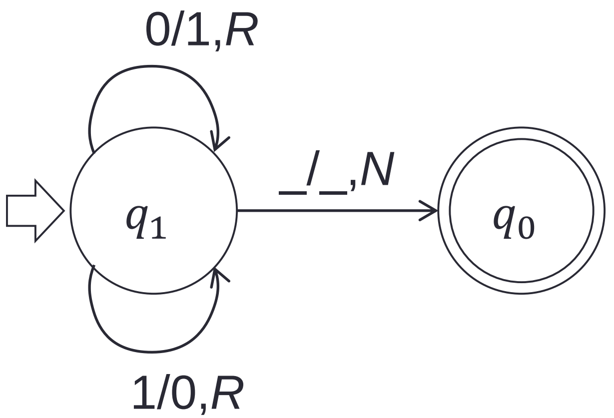


チューリング機械の例(2)

- テープ上の「1」と「0」を反転させるチューリング機械を作りなさい.

$$M_4 = (\{\_, 0, 1\}, \{q_0, q_1\}, T_4)$$

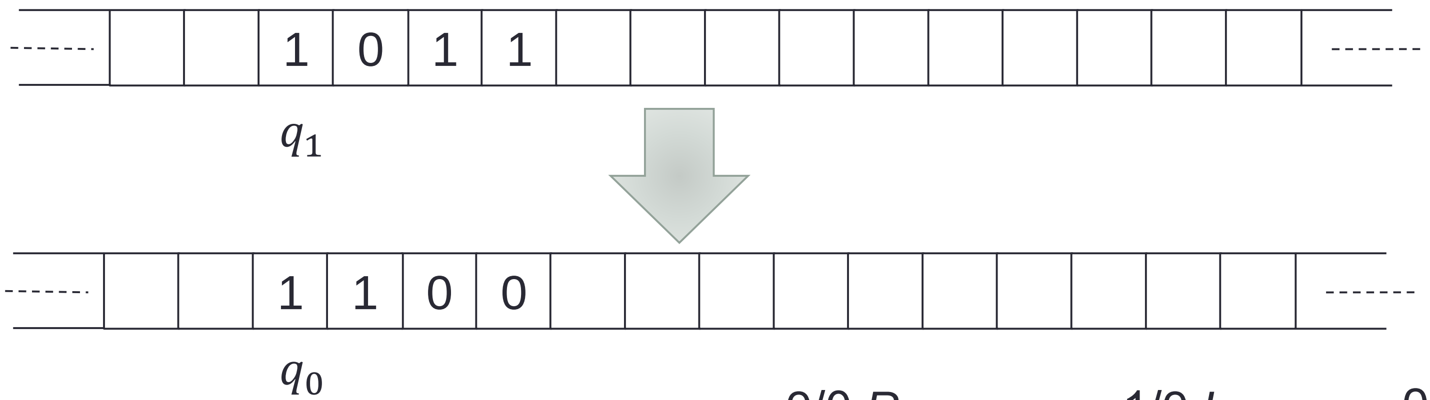
T_4	_	0	1
q_1	(, ,)	(, ,)	(, ,)



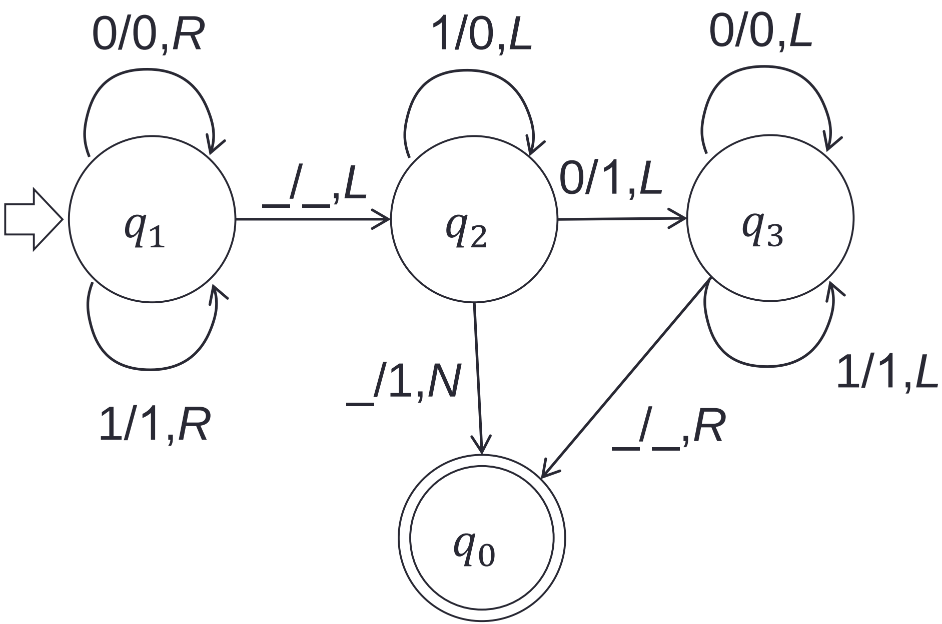
チューリング機械の例(3)

- テープ上の二進数の数字に1を加えるチューリング機械を作りなさい.

$$M_5 = (\{\_, 0,1\}, \{q_0, q_1, q_2, \cdots\}, T_5)$$



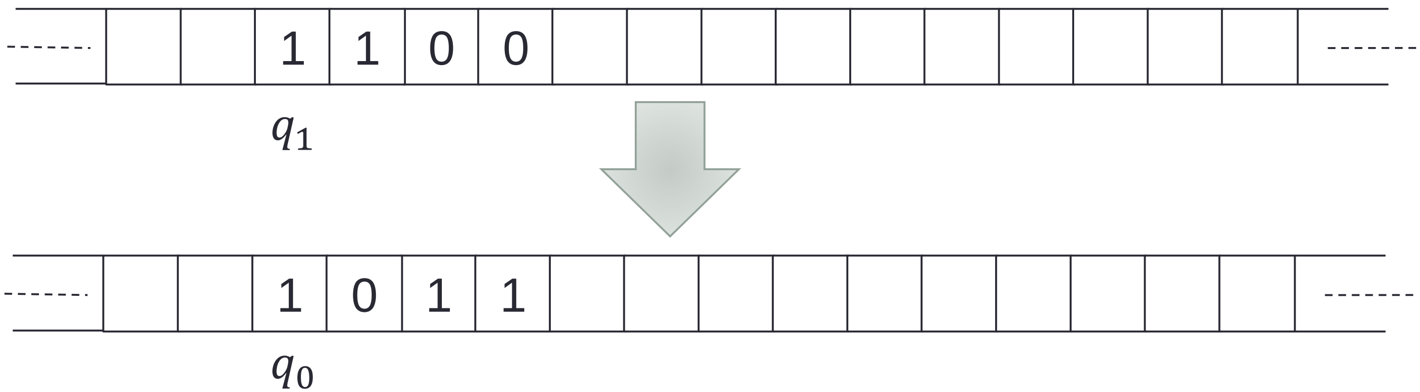
T_5	_	0	1
q_1	(q_2,_,*L*)	(q_1,0,*R*)	(q_1,1,*R*)
q_2	(q_0,1,*N*)	(q_3,1,*L*)	(q_2,0,*L*)
q_3	(q_0,_,*R*)	(q_3,0,*L*)	(q_3,1,*L*)



チューリング機械の例(4)

- テープ上の二進数の数字から1を引くチューリング機械を作りなさい.

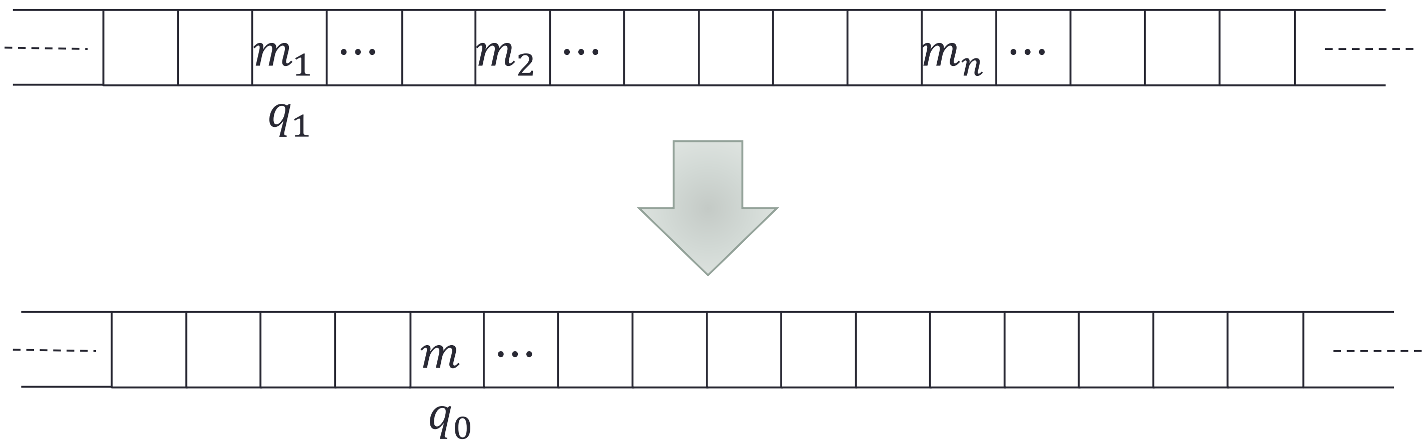
$$M_6 = (\{\_, 0{,}1\}, \{q_0, q_1, q_2, \cdots\}, T_6)$$



T_6	_	0	1
q_1	(, ,)	(, ,)	(, ,)
q_2	(, ,)	(, ,)	(, ,)
q_3	(, ,)	(, ,)	(, ,)

チューリング機械の計算

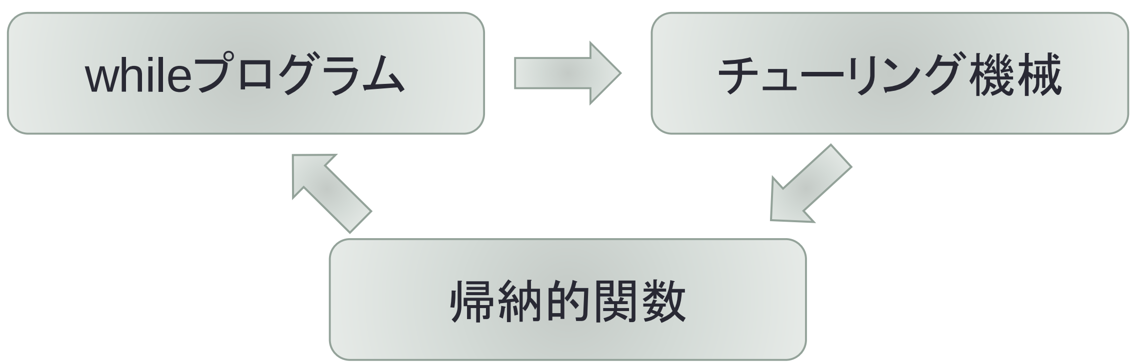
- チューリング機械 M が関数 $f: N^n \to N$ を計算するとは,
  - 数字 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ をテープ上に空白で区切って書いておく.
  - ヘッドを左端にセットして M を開始する.
  - M が停止した時に, テープ上に$f(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ の値が書かれる.



チューリング機械とプログラム

- チューリング機械は一般には停止しない.
  - 計算する関数は全域的ではなく部分的

- **定理**
  - チューリング機械が計算する関数 $f: N^n \to N$ はwhileプログラムで計算できる.
  - 帰納的関数 $f: N^n \to N$ はチューリング機械で計算することができる.



まとめ

- 有限状態オートマトン
  - 有限個の状態の集合
  - 状態遷移関数
- チューリング機械
  - 無限のテープとヘッド
- 計算
  - フローチャート
  - whileプログラム
  - 帰納的関数
  - チューリング機械