情報数学
第7回　ラムダ計算と計算可能性

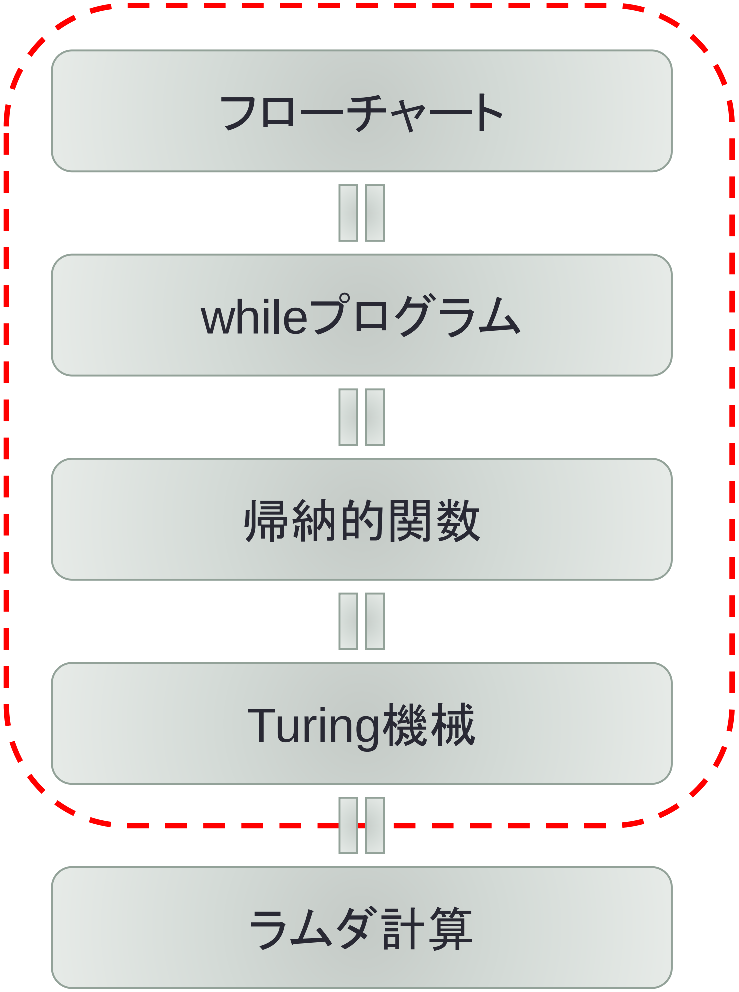
萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

これまで

- 計算
  - フローチャート
  - whileプログラム
  - 帰納的関数
    - 原始帰納的関数
    - 最小解演算子
  - Turing機械
    - 決定不可能問題
  - ラムダ計算
    - 関数抽象
    - 関数適用



λ表現

- 部分関数 $f: N^n \to N$ の**λ表現** F とは:
  - もし $f(k_1, k_2, \ldots, k_n) = k$ であれば,

$$F\lceil k_1 \rceil \lceil k_2 \rceil \ldots \lceil k_n \rceil \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil k \rceil$$

ここで $\lceil k_i \rceil$ は, 自然数 k_i の**λ表現**(次に定義)

- $\lceil f \rceil \equiv F$ を f の**λ表現**と呼ぶ.

真偽と対のλ表現

- 真と偽のλ表現:
  - $[\mathrm{true}] \equiv \lambda x\ y.\, x$
  - $[\mathrm{false}] \equiv \lambda x\ y.\, y$
  - $[\mathrm{true}]M\ N \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
  - $[\mathrm{false}]M\ N \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
- 2つの式の対のλ表現:
  - $[M, N] \equiv \lambda x.\, x\ M\ N$
  - $\pi_1 \equiv \lambda x.\, x[\mathrm{true}]$
  - $\pi_2 \equiv \lambda x.\, x[\mathrm{false}]$
  - $\pi_1[M, N] \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$
  - $\pi_2[M, N] \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow}$

自然数のλ表現

- 自然数のλ表現:
  - $\lceil 0 \rceil \equiv \lambda x\ y.\ y$
  - $\lceil 1 \rceil \equiv \lambda x\ y.\ x\ y$
  - $\lceil 2 \rceil \equiv \lambda x\ y.\ x(x\ y)$
  - $\lceil 3 \rceil \equiv \lambda x\ y.\ x\big(x(x\ y)\big)$

    $\vdots$
  - $\lceil n \rceil \equiv \lambda x\ y.\ \overbrace{x\big(x(\cdots(x}^{n}\ y)\cdots)\big)$
- 演算:
  - $\lceil \mathrm{suc} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z.\ y(x\ y\ z)$
  - $\lceil \mathrm{add} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z\ w.\ x\ z(y\ z\ w)$
  - $\lceil \mathrm{mul} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z\ w.\ x(y\ z)w$
  - $\lceil \mathrm{pred} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z.\ x\big(\lambda u\ v.\ v(u\ y)\big)(\lambda a.\ z)(\lambda a.\ a)$
  - $\lceil \mathrm{zero?} \rceil \equiv \lambda x.\ x(\lambda x.\ \lceil \mathrm{false} \rceil)\lceil \mathrm{true} \rceil$

λ表現での計算を試してみよう

- $\lceil \mathrm{suc} \rceil \lceil 2 \rceil \equiv \big(\lambda x\ y\ z. y(x\ y\ z)\big)\big(\lambda x\ y. x(x\ y)\big)$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\equiv \lceil 3 \rceil$

- $\lceil \mathrm{add} \rceil \lceil 3 \rceil \lceil 2 \rceil \equiv \big(\lambda x\ y\ z\ w. x\ z(y\ z\ w)\big)\Big(\lambda x\ y. x\big(x(x\ y)\big)\Big)\big(\lambda x\ y. x(x\ y)\big)$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\overset{\alpha\beta}{\Longrightarrow}$

  $\equiv \lceil 5 \rceil$

帰納的関数

- 原始帰納的関数：
  - 基本的関数
    - $zero: N^0 \to N$ $\quad zero() = 0$
    - $suc: N \to N$ $\quad suc(x) = x + 1$
    - $\pi_i^n: N^n \to N$ $\quad \pi_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$
  - 関数の合成
    - $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\big(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$
  - 原始帰納法による関数の定義
    - $f(x_1, \dots, x_n, zero()) = g(x_1, \dots, x_n)$
    - $f\big(x_1, \dots, x_n, suc(y)\big) = h\big(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)\big)$

- 帰納的関数：
  - 最小解演算子
    - $f(x_1, \dots, x_n) = \mu_y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$

原始帰納的関数のλ表現

- 基本的関数:
  - $\lceil \mathrm{zero} \rceil \equiv \lambda x. \lceil 0 \rceil \equiv \lambda x\ y\ z. z$
  - $\lceil \mathrm{suc} \rceil \equiv \lambda x\ y\ z. y(x\ y\ z)$
  - $\lceil \pi_i^n \rceil \equiv \lambda x_1\ x_2 \cdots\ x_n. x_i$

- 関数合成:
  - $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\big(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$ のとき,

$$\lceil f \rceil \equiv \lambda x_1\ x_2 \cdots\ x_n. \lceil g \rceil(\lceil h_1 \rceil x_1\ x_2 \cdots\ x_n) \cdots (\lceil h_m \rceil x_1\ x_2 \cdots x_n)$$

- 例:
  - $\mathrm{dsuc}(x) = \mathrm{suc}\big(\mathrm{suc}(x)\big)$
  - $\lceil \mathrm{dsuc} \rceil \equiv \lambda x. \lceil \mathrm{suc} \rceil(\lceil \mathrm{suc} \rceil x)$

原始帰納法

- 単純化して，引数は2つとする.
  - $f(x, zero()) = g(x)$
  - $f\big(x, suc(y)\big) = h\big(x, y, f(x, y)\big)$

- $F \equiv \lceil f \rceil$ の構成:
  - F は次の性質を持たなくてはいけない:
    $$F\ x\ y \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\Big(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big(F\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big)\Big)$$
  - F は次の M の不動点:
    $$M \equiv \lambda f\ x\ y.\lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\Big(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big(f\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big)\Big)$$
  - Curryの不動点演算子 $Y \equiv \lambda y.\big(\lambda x.y(x\ x)\big)\big(\lambda x.y(x\ x)\big)$ を用いると:
    $$F \equiv Y\ M$$
    $$F \equiv Y\left(\lambda f\ x\ y.\lceil \mathrm{zero?} \rceil y(\lceil g \rceil x)\Big(\lceil h \rceil x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big(f\ x(\lceil \mathrm{pred} \rceil y)\big)\Big)\right)$$

最小解演算子

- 単純化して，引数は1つとする.
  - $f(x) = \mu_y(g(x, y) = 0)$

- $F \equiv \lceil f \rceil$ の構成:
  - H を次の性質を満たすλ式とする:
    $H\ x\ y \overset{\alpha\beta}{\Rightarrow} \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(H\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)$
  - H はCurryの不動点演算子 Y を用いることで定義できる:
    $H \equiv Y \left(\lambda h\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(h\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)\right)$
  - $F \equiv \lambda x. H\ x \lceil 0 \rceil$
    $F \equiv \lambda x. Y \left(\lambda h\ x\ y. \lceil \mathrm{zero?} \rceil (\lceil g \rceil x\ y) y \big(h\ x (\lceil \mathrm{suc} \rceil y)\big)\right) x \lceil 0 \rceil$

計算可能性

- 計算可能な関数はλ表現可能である.
  - 計算可能な関数は帰納的関数である.
  - 帰納的関数はλ表現を持つ.

- λ表現可能な関数は計算可能である.
  - λ表現可能な関数は最左β変換により実行可能である.
  - λ式を数字でコード化できる.
  - 最左β変換を行うプログラムを作成することができる.

η変換

- 関数の外延性(extensionality)
  - 2つの関数は，与えられた引数に対して同じ値を返す時に等しい.
  - $f = g \Leftrightarrow \forall x\big(f(x) = g(x)\big)$

- $\alpha\beta$同等性では外延性は成り立たない.
  - $P \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} Q$ であれば，$x \notin \mathrm{FV}(PQ)$ に対して $P\ x \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} Q\ x$ が成り立つ.
  - しかし，逆は成り立たない：$\lambda x.\, y\ x \overset{\alpha\beta}{\Leftrightarrow} y$ ではない.

- η変換：

$$\lambda x.\, P\ x \xrightarrow{\eta} P$$

ただし $x \notin \mathrm{FV}(P)$

まとめ

- ラムダ式
- ラムダ式の変換
  - α変換
  - β変換
  - η変換
- 計算可能性
  - λ表現
  - 自然数のλ表現