

情報数学

第8回 完全半順序

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

スライドURL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

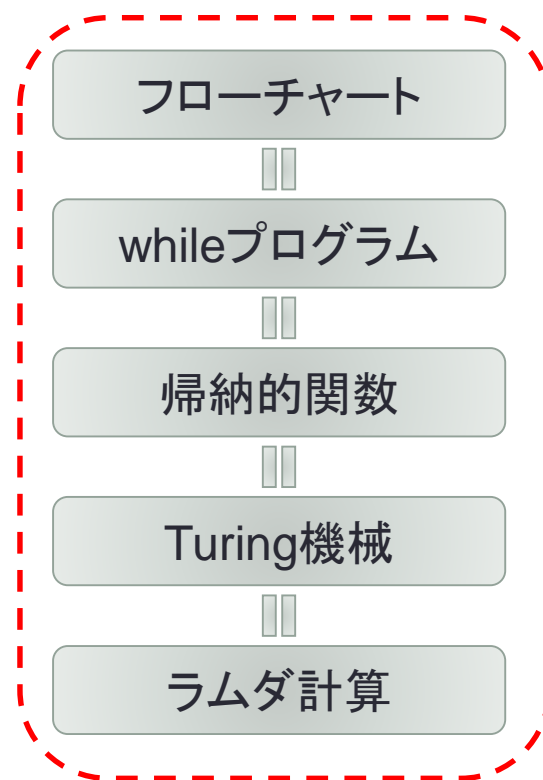
これまで

• 計算

- フローチャート
- whileプログラム
- 帰納的関数
 - 原始帰納的関数
 - 最小解演算子
- Turing機械
 - 決定不能問題
- ラムダ計算
 - 関数抽象
 - 関数適用
 - λ 表現

• λ 式

- 関数抽象と適用をモデル
- どんな関数なのか？
- $\lambda x. x x$
- x は関数であり値でもある.



ラムダ計算のモデル

• λ 式の意味

- $\Lambda = \{M \mid M \text{ は } \lambda\text{式}\}$
- M の意味
 - $\llbracket M \rrbracket$
 - M の表示 (denotation)

• $\llbracket \cdot \rrbracket: \Lambda \rightarrow D$

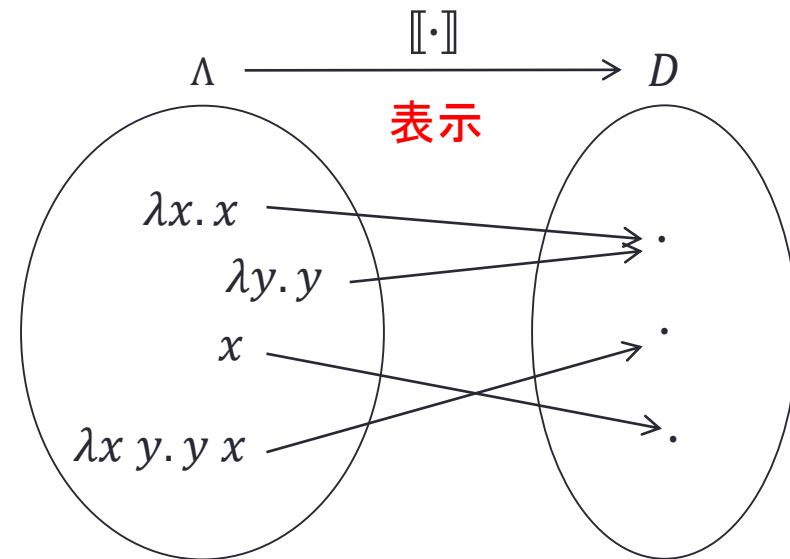
- λ 式に意味 (D の値) を対応させる.
- $\llbracket \lambda x. M \rrbracket = \lambda x. \llbracket M \rrbracket$
- $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket(\llbracket N \rrbracket)$

• D の性質

- $\llbracket \lambda x. M \rrbracket \in D \rightarrow D$
 - $D \rightarrow D \subseteq D$
- $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket(\llbracket N \rrbracket)$
 - $D \subseteq D \rightarrow D$

• すなわち,

- $D \cong D \rightarrow D$
- D の要素は関数である.
- 1点集合以外に存在しない.

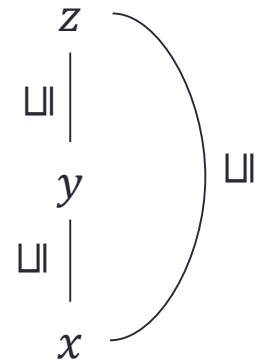


情報の数学的性質1

- 情報には大小関係がある。
 - 「SFCは神奈川県にある」
 - 「SFCは関東にある」
 - 「SFCは藤沢市にある」
- 数字の大小と同じ？
 - 「SFCは神奈川県にある」
 - 「SFCは慶応大学のキャンパスである」
- すべての情報同士が比較できるわけではない。

順序関係

- \sqsubseteq が集合 D 上の**順序関係**:
 - 反射律 (reflective): $x \sqsubseteq x$
 - 推移律 (transitive): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$
 - 反対称律 (antisymmetric): $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$
- (D, \sqsubseteq) は**半順序集合** (partially ordered set) である
 - \sqsubseteq は半順序
- 情報は半順序集合である.
 - **全順序集合** (totally ordered set) ではない.
 - 完全性 (totality): $x \sqsubseteq y$ あるいは $y \sqsubseteq x$ のどちらかが成り立つ.
- 半順序集合であるのはどれ?
 - 自然数の $x \leq y$
 - 整数の $x \leq y$
 - 自然数の $x < y$
 - 集合の包含関係の $A \subseteq B$
 - 友達関係



情報の数学的性質2

- 情報には最小の情報がある.

- なにもない情報
- なにも知らない

- \perp が**最小元**である:

- どんな x に対しても $\perp \sqsubseteq x$



- 次の半順序集合の最小元は？

- 自然数の $x \leq y$
- 整数の $x \leq y$
- 集合の包含関係の $A \subseteq B$

最大元は？

- \top が**最大元**である：
 - どのような x に対しても $x \sqsubseteq \top$

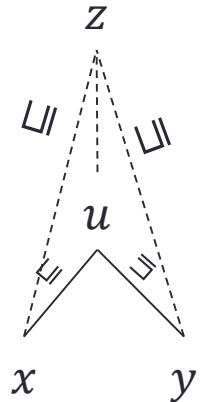


- 最大の情報とは？
 - なんでもかんでも
 - すべての情報をあわせたもの
 - わけが分からない
 - 矛盾

情報の数学的性質3

- 複数の情報をあわせる.
 - ①「SFCは藤沢市にある」
 - ②「SFCは慶應大学のキャンパスである」
 - ③「SFCは藤沢市にある慶應大学のキャンパスである」

① \sqsubseteq ③ かつ ② \sqsubseteq ③
- ③は①と②の**上限**になっている.
- u が x と y の**上限** (least upper bound) であるとは:
 - $x \sqsubseteq u$ かつ $y \sqsubseteq u$
 - もし z が $x \sqsubseteq z$ かつ $y \sqsubseteq z$ を満たすなら, $u \sqsubseteq z$ である.
 - $x \sqcup y$ と書く.
 - x と y より大きい要素の中で最も小さいもの.
 - 上限は存在すれば一意的.
- 次の半順序集合において上限とは何か?
 - 自然数の $x \leq y$
 - 集合の包含関係の $A \subseteq B$



完備束 (Complete Lattice)

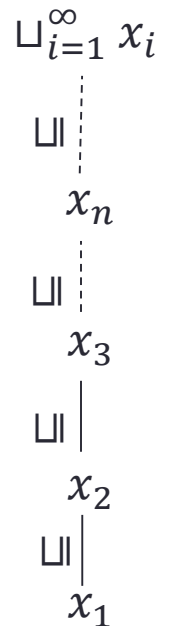
- $\sqcup A$ が集合 A の上限であるとは:
 - $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq \sqcup A$
 - もし z がすべての $x \in A$ に対して $x \sqsubseteq z$ となるなら, $\sqcup A \sqsubseteq z$
- $\sqcup \{x, y\} = x \sqcup y$
- A の上限と A の最大元は異なる.
 - $\{0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots\}$
 - A の最大元は A の要素でなくてはならない.
- (D, \sqsubseteq) が**完備束** (complete lattice) であるとは:
 - 任意の集合 A の上限 $\sqcup A$ が存在する.

完備束の性質

- 完備束には必ず最小元がある.
 - $\perp = \sqcup \emptyset$
- 完備束は任意の集合の**下限** (greatest lower bound) がある.
 - $\sqcap A$ が集合 A の下限であるとは:
 - 任意の $x \in A$ に対して $\sqcap A \sqsubseteq x$
 - もし z が任意の $x \in A$ に対して $z \sqsubseteq x$ となれば, $z \sqsubseteq \sqcap A$
 - $\sqcap A = \sqcup \{z \in D \mid \text{任意の } x \in A \text{ に対して } z \sqsubseteq x\}$
- 完備束には必ず最大元がある.
 - $\top = \sqcap \emptyset$
- 情報の集合は完備束か？

完全半順序集合 (Complete Partial Ordered Set)

- 半順序集合 (D, \sqsubseteq) が**完全半順序集合** (complete partial ordered set, cpo) であるとは:
 - 最小元 \perp がある.
 - $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \dots$, となる要素列に対して上限 $\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i$ がある.
- 最大元があるとは限らない.
- 情報の集合は完全半順序集合である.**



例

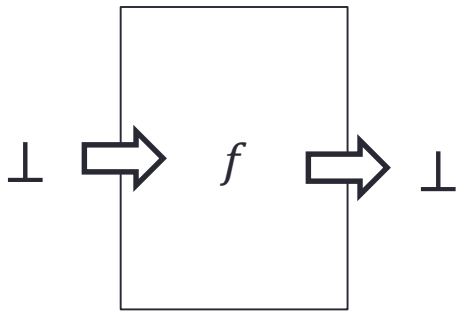
- 集合の包含関係 $A \subseteq B$
- 完備束
- **平坦領域** (flat domain) :
 - 集合 S に最小元 \perp を追加する.
 - $x \in S$ に対して $\perp \sqsubseteq x$
 - 平坦領域は完全半順序集合である.
- 真偽値の集合 $B = \{tt, ff\}$ の平坦領域は:

$$B_{\perp} = \left[\begin{array}{cc} tt & ff \\ & \perp \end{array} \right]$$

プログラムは関数である

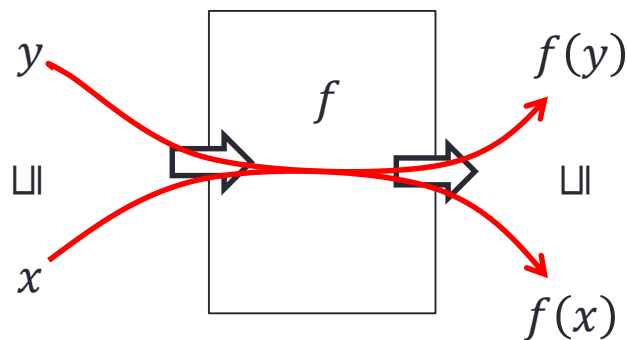
- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$ に対してどうする?

(1) $f(\perp) = \perp$



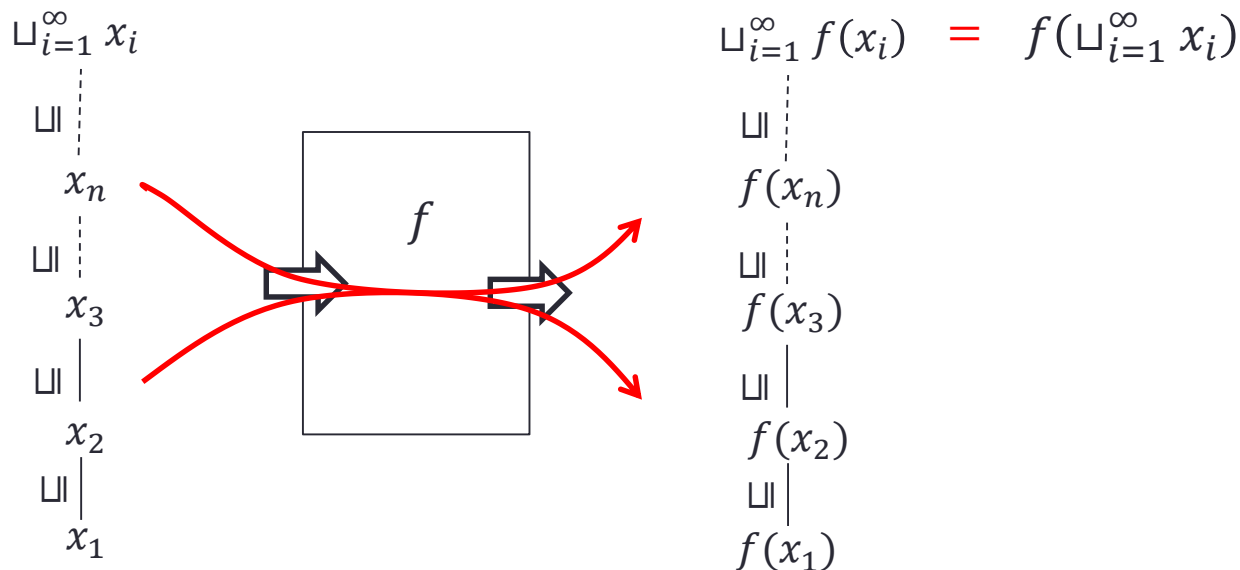
プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は \perp , \sqsubseteq , \sqcup に対してどうする?
 - (1) $f(\perp) = \perp$
 - (2) $x \sqsubseteq y$ ならば $f(x) \sqsubseteq f(y)$



プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は \perp , \sqsubseteq , \sqcup に対してどうする?
 - (1) $f(\perp) = \perp$
 - (2) $x \sqsubseteq y$ ならば $f(x) \sqsubseteq f(y)$
 - (3) $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$ に対して $f(\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$



プログラムは関数である

- プログラムは, 完全半順序間の関数である.
- 関数は $\perp, \sqsubseteq, \sqcup$ に対してどうする?
 - (1) $f(\perp) = \perp$
 - (2) $x \sqsubseteq y$ ならば $f(x) \sqsubseteq f(y)$
 - (3) $x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$ に対して $f(\sqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f(x_i)$
- f が(2)を満たすとき, f は**単調**(monotonic)関数である.
- f が(2)と(3)を満たすとき, f は**連続**(continuous)関数である.
- f が(1)を満たすとき, f は**正格**(strict)である.
- **プログラムは連続である.**

最小元の正体

- 最小元 \perp の意味は？
 - 情報がない
 - メモリはクリアされた状態
 - 計算の最初
 - まだ計算が始まっていない
- プログラムが \perp を返す意味：
 - 答えがない.
 - 計算が終わらない.
 - 結果は未定義である.
- プログラムに \perp を渡す意味：
 - なにも情報がないが計算して！
 - この値を使うな.
- 正格な関数とは？
 - プログラムは常に正格か？

連続関数の例(1)

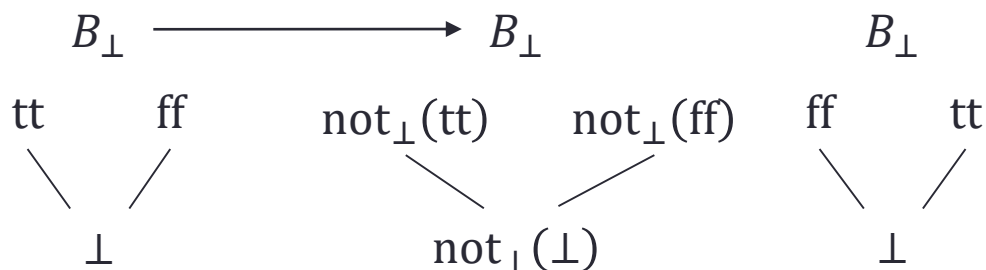
- $B = \{tt, ff\}$
- $\text{not}: B \rightarrow B$
 - $\text{not}(tt) = ff$
 - $\text{not}(ff) = tt$



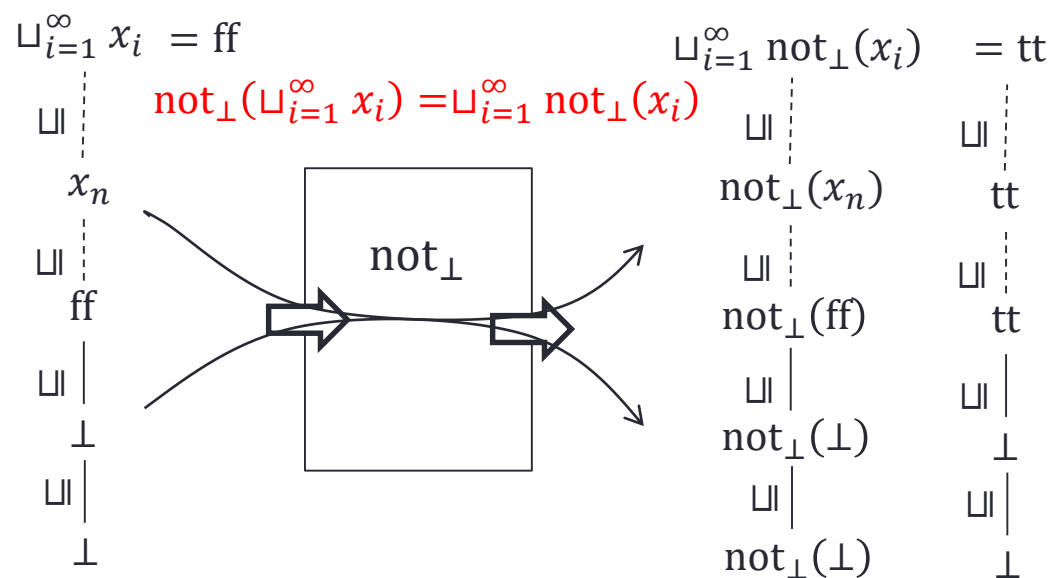
- $\text{not}_\perp: B_\perp \rightarrow B_\perp$
 - $\text{not}_\perp(tt) = ff$
 - $\text{not}_\perp(ff) = tt$
 - $\text{not}_\perp(\perp) = \perp$

単調

- $\perp \sqsubseteq ff$ にたいして $\text{not}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{not}_\perp(ff)$
- $\perp \sqsubseteq tt$ にたいして $\text{not}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{not}_\perp(tt)$

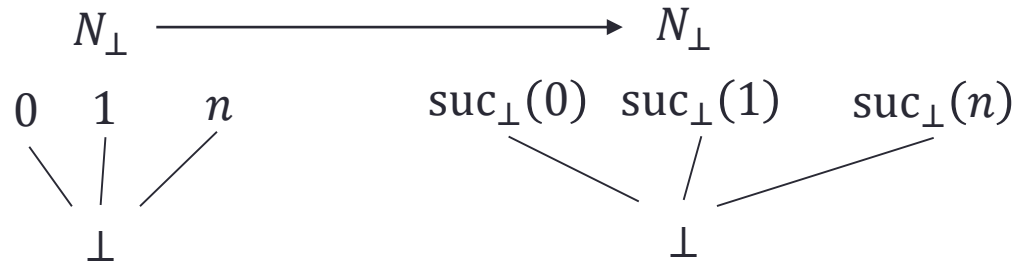


連続



連続関数の例(2)

- $N = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\text{suc}: N \rightarrow N$
 - $\text{suc}(n) = n + 1$
- 単調
 - $\perp \sqsubseteq n$ に対して $\text{suc}_\perp(\perp) \sqsubseteq \text{suc}_\perp(n)$



- $\text{suc}_\perp: N_\perp \rightarrow N_\perp$
 - $\text{suc}_\perp(n) = n + 1$
 - $\text{suc}_\perp(\perp) = \perp$
- 連続
 - $$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} x_i = 3$$

$$\text{suc}_\perp(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} x_i) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \text{suc}_\perp(x_i)$$
 - $$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \text{suc}_\perp(x_i) = 4$$

まとめ

- 完全半順序
 - 情報の集合
 - 半順序
 - 最小元
 - 上限
- 連続関数
 - 上限を保存する
 - 正格とは？