情報数学
第10回　連続関数と不動点意味論

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

不動点定理

- **定理**: 連続関数 $f: D \to D$ は最小不動点を持つ.
  - f の不動点 $u \Leftrightarrow f(u) = u$
- 証明: $f(\bot) \sqsubseteq f(f(\bot))$
  - $\bot \sqsubseteq f(\bot) \sqsubseteq f(f(\bot)) \sqsubseteq f^3(\bot) \sqsubseteq f^4(\bot) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f^i(\bot) \sqsubseteq \cdots$
  - $\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\bot)$ が最小不動点である.
    - $f\left(\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\bot)\right) = \sqcup_{i=1}^{\infty} f^i(\bot) = \sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\bot)$ 不動点
    - 任意の不動点 $u = f(u)$ に対して
      - $\bot \sqsubseteq u$
      - $f(\bot) \sqsubseteq f(u) = u$
      - $f^2(\bot) \sqsubseteq f(u) = u$
      - $f^i(\bot) \sqsubseteq u$
      - したがって, $\sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\bot) \sqsubseteq u.$ 最小不動点
- fix: $[D \to D] \to D$
  - $\mathrm{fix}(f) = \sqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\bot)$
  - これも連続

不動点意味論

- 再帰プログラムは分かりにくい？
  - $\mathrm{fact}(x) \equiv \mathrm{if}\ x = 0\ \mathrm{then}\ 1\ \mathrm{else}\ x \times \mathrm{fact}(x-1)$

- $\mathrm{fact}: N_\perp \to N_\perp$
  - $\mathrm{fact} = \lambda x.\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, x \times \mathrm{fact}(x-1)\big)$
  - fact は次の関数 F の不動点
    - $F: [N_\perp \to N_\perp] \to [N_\perp \to N_\perp]$
    - $F(f) = \lambda x.\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, x \times f(x-1)\big)$
  - fact を F の最小不動点として理解する.
    - $F(\perp) =$
    - $F^2(\perp) =$
    - $F^3(\perp) =$
    - $\vdots$
    - $\mathrm{fix}(F) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$

$\mathrm{fact} = \mathrm{fix}(F) = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$

- $F(f) = \lambda x.\,\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, x \times f(x-1)\big)$
- $F(\perp) =$
- $F^2(\perp) =$

$\mathrm{fact} = \mathrm{fix}(F) = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp)$

- $F^3(\perp) =$

- $F^n(\perp) =$
- $F^{n+1}(\perp) =$

- $\mathrm{fact} = \sqcup_{n=0}^{\infty} F^n(\perp) =$

例1

- $g(x) \equiv \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } g(x-1)$
- $g \equiv \lambda x.\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, g(x-1)\big)$
- g は $G(g) \equiv \lambda x.\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, g(x-1)\big)$ の不動点
- $g = \sqcup_{n=0}^{\infty} G^n(\perp)$
- $G(\perp) =$
- $G^2(\perp) =$
- $G^3(\perp) =$
- $G^n(\perp) =$
- $g = \sqcup_{n=0}^{\infty} G^n(\perp) =$

例2

- $h(x) \equiv \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } h(x)$
- $h \equiv \lambda x.\,\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, h(x)\big)$
- h は $H(h) \equiv \lambda x.\,\mathrm{cond}\big(x = 0, 1, h(x)\big)$ の不動点
- $h = \sqcup_{n=0}^{\infty} H^n(\perp)$
- $H(\perp) =$
- $H^2(\perp) =$
- $H^3(\perp) =$
- $H^n(\perp) =$
- $h = \sqcup_{n=0}^{\infty} H^n(\perp) =$

例3

- 次のマッカーシーの91関数が何を計算するかを求めなさい.
  - $f(x) \equiv \mathrm{cond}\left(x > 100, x - 10, f\left(f(x + 11)\right)\right)$

まとめ

- 不動点
  - 不動点定理
  - 再帰的関数の不動点意味論