情報数学
第11回　表示的意味

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

再帰関数の不動点意味論(例)

- 次のマッカーシーの91関数が何を計算するかを求めなさい.
  - $f(x) \equiv \mathrm{cond}\left(x > 100, x - 10, f\left(f(x + 11)\right)\right)$

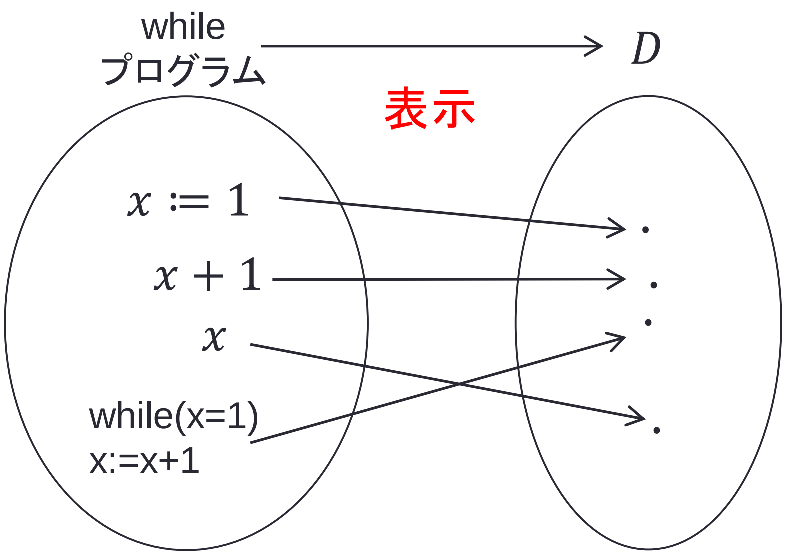
1. 上記の関数は次の関数の最小不動点
   - $F(f) = \lambda x.\mathrm{cond}\left(x > 100, x - 10, f\left(f(x + 11)\right)\right)$
2. 次の関数が F の不動点であることを示すことで $f \sqsubseteq g$ であることがわかる.
   - $g(x) \equiv \mathrm{cond}(x > 100, x - 10, 91)$
3. $g_n(x) \equiv \mathrm{cond}\left(x > 100, x - 10, \mathrm{cond}(x > 101 - n, 91, \bot)\right)$ としたとき
   - $g_n \sqsubseteq F^n(\bot)$ を示すことで, $g \sqsubseteq f$ を示す.
4. 以上より, $f = g$

プログラミング言語の意味

- プログラミング言語の構文
  - BNF（あるいは文脈自由文法）を使って形式的に定義されることが多い
- プログラミング言語の意味
  - 自然言語で説明されることが多く，あいまいである
- 形式的意味
  - 公理的意味
    - プログラムを論理式の中に埋め込む
  - 操作的意味
    - プログラムを別の良くわかっているシステムで模倣する
  - 表示的意味
    - プログラムを数学的対象として埋め込む

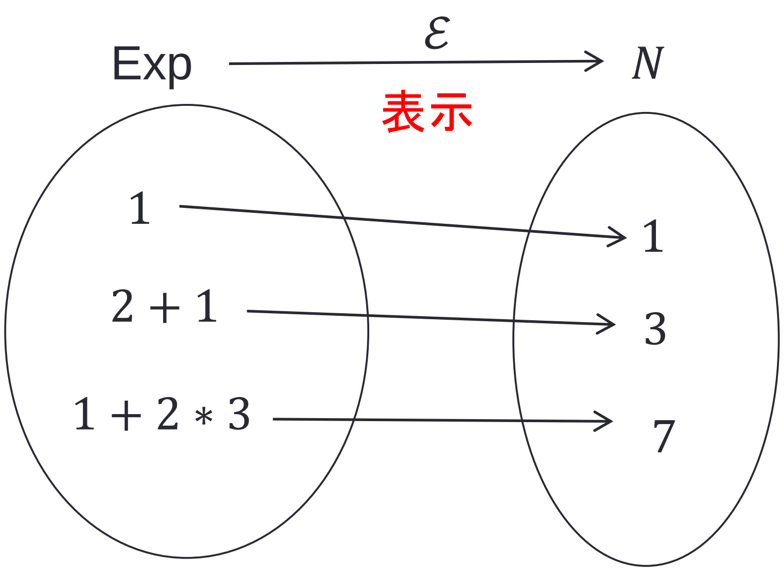
Whileプログラム

- Whileプログラム
  - $\mathrm{input}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
  - $\mathrm{output}(y)$
  - $x := e$
  - $\{P_1; P_2; \cdots; P_n\}$
  - if $(e_1 = e_2)$ then P else Q
  - while $(e_1 = e_2)$ P



式の表示

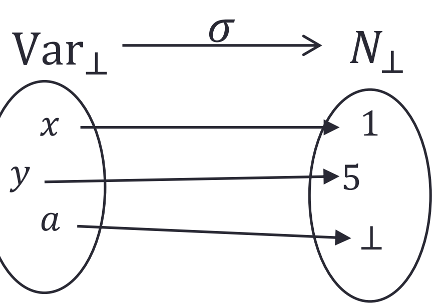
- 式の抽象構文 $e \in \mathrm{Exp}$
  - $n \in N$
  - $e ::= n \mid e_1 + e_2 \mid e_1 - e_2 \mid e_1 * e_2 \mid e_1 \,/\, e_2$



- $\mathcal{E}[\![n]\!] = n$
- $\mathcal{E}[\![e_1 + e_2]\!] = \mathcal{E}[\![e_1]\!] + \mathcal{E}[\![e_2]\!]$
- $\mathcal{E}[\![e_1 - e_2]\!] = \mathcal{E}[\![e_1]\!] - \mathcal{E}[\![e_2]\!]$
- $\mathcal{E}[\![e_1 * e_2]\!] = \mathcal{E}[\![e_1]\!] \times \mathcal{E}[\![e_2]\!]$
- $\mathcal{E}[\![e_1 \,/\, e_2]\!] = \mathcal{E}[\![e_1]\!] \div \mathcal{E}[\![e_2]\!]$

変数付き式の表示

- 変数付き式の抽象構文 $e \in \mathrm{Exp}$
  - $n \in N$
  - $v \in \mathrm{Var}$
  - $e ::= n \mid v \mid e_1 + e_2 \mid e_1 - e_2 \mid e_1 * e_2 \mid e_1 \,/\, e_2$
- $e \in \mathrm{Exp}$ の表示は現在の変数の値に依存する
- 状態 S
  - $S = [\mathrm{Var}_\perp \to N_\perp]$
  - $\sigma \in S$ は変数を値に対応させる



- Exp の表示
  - $\mathcal{E} \in \mathrm{Exp} \to [S \to N_\perp]$

- $\mathcal{E}[\![n]\!]\sigma = n$
- $\mathcal{E}[\![v]\!]\sigma = \sigma[\![v]\!]$
- $\mathcal{E}[\![e_1 + e_2]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma + \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma$
- $\mathcal{E}[\![e_1 - e_2]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma - \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma$
- $\mathcal{E}[\![e_1 * e_2]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma \times \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma$
- $\mathcal{E}[\![e_1 \,/\, e_2]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma \div \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma$

文の表示

- 文の抽象構文 $c \in \mathrm{Cmd}$
  - c ::= null $\mid x \coloneqq e \mid$ if $(e_1 = e_2)\ c_1$ else $c_2 \mid$ while $(e_1 = e_2)\ c \mid c_1; c_2$
- Cmd の表示
  - $\mathcal{C} \in \mathrm{Cmd} \to [S \to S]$

$$S \xrightarrow{\mathcal{C}[\![c]\!]} S$$

- $\mathcal{C}[\![\mathrm{null}]\!]\sigma = \sigma$
- $\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!]\sigma = \mathcal{C}[\![c_2]\!](\mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma)$
  - $\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!] = \mathcal{C}[\![c_2]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_1]\!]$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathcal{C}[\![c_1]\!]"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!]"'] & S \arrow[r, "\mathcal{C}[\![c_2]\!]"] & S \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{C}[\![x \coloneqq e\,]\!]\sigma = \sigma[\mathcal{E}[\![e]\!]\sigma / x]$

$$\sigma[n/x][\![y]\!] = \begin{cases} n & (y = x \text{ のとき}) \\ \sigma[\![y]\!] & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- $\mathcal{C}[\![\mathrm{if}\ (e_1 = e_2)\ c_1\ \mathrm{else}\ c_2]\!]\sigma = \mathrm{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![c_2]\!]\sigma)$

文の表示(つづき)

- $\mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!]\sigma$
- $\text{while } (e_1 = e_2)\ c \equiv \text{if } (e_1 = e_2)\ \{c; \text{while } (e_1 = e_2)\ c\} \text{ else null}$
- $\mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!]\sigma = \mathcal{C}[\![\text{if } (e_1 = e_2)\ \{c; \text{while } (e_1 = e_2)\ c\} \text{ else null }]\!]\sigma$

$$= \text{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![c; \text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![\text{null}]\!]\sigma)$$

$$= \text{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!](\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma), \sigma)$$

- $\mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!] = \lambda\sigma.\text{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!](\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma), \sigma)$
- $\mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!]$ は次の式の不動点である
  - $\lambda w.\lambda\sigma.\text{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, w(\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma), \sigma)$
- $\mathcal{C}[\![\text{while } (e_1 = e_2)\ c]\!] = \text{fix}\big(\lambda w.\lambda\sigma.\text{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, w(\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma), \sigma)\big)$

$$\text{fix}(f) \equiv \sqcup_{i=0}^{\infty} f^{i}(\bot)$$

文の表示（まとめ）

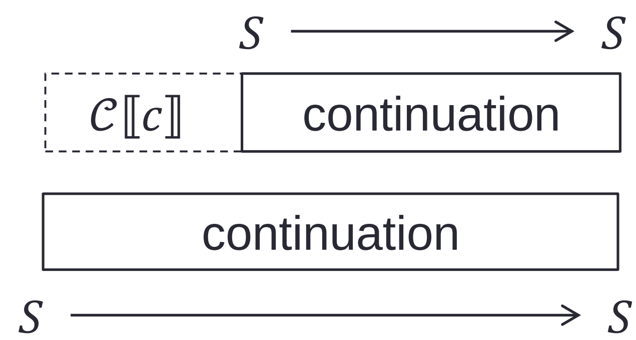
- 文の抽象構文 $c \in \mathrm{Cmd}$
  - $c ::= \mathrm{null} \mid x \coloneqq e \mid \mathrm{if}\ (e_1 = e_2)\ c_1\ \mathrm{else}\ c_2 \mid \mathrm{while}\ (e_1 = e_2)\ c \mid c_1; c_2$
- Cmd の表示
  - $\mathcal{C} \in \mathrm{Cmd} \to [S \to S]$

$$S \xrightarrow{\mathcal{C}[\![c]\!]} S$$

- $\mathcal{C}[\![\mathrm{null}]\!]\sigma = \sigma$
- $\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!] = \mathcal{C}[\![c_2]\!] \circ \mathcal{C}[\![c_1]\!]$
- $\mathcal{C}[\![x \coloneqq e\ ]\!]\sigma = \sigma[\mathcal{E}[\![e]\!]\sigma / x]$
- $\mathcal{C}[\![\mathrm{if}\ (e_1 = e_2)\ c_1\ \mathrm{else}\ c_2]\!]\sigma = \mathrm{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![c_1]\!]\sigma, \mathcal{C}[\![c_2]\!]\sigma)$
- $\mathcal{C}[\![\mathrm{while}\ (e_1 = e_2)\ c]\!] = \mathrm{fix}\big(\lambda w. \lambda\sigma. \mathrm{cond}(\mathcal{E}[\![e_1]\!]\sigma = \mathcal{E}[\![e_2]\!]\sigma, w(\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma), \sigma)\big)$

継続

- 副作用を扱うのが難しい
  - $\mathcal{C}[\![x \coloneqq e\,]\!]\sigma = \sigma[\mathcal{E}[\![e]\!]\sigma/x]$
- 継続とは
  - 残りの計算を表す
  - $C = [S \to S]$
- $\mathcal{C}[\![c]\!]$
  - 残りの計算を受け取り
  - c を含んだ計算を返す
  - $\mathcal{C}[\![c]\!] \in [C \to C]$
- $\mathcal{E}[\![e]\!] \in [K \to C]$
  - $K = [N_\perp \to C]$
  - K は式の継続



$$[S \to S] \xrightarrow{\mathcal{C}[\![c]\!]} [S \to S]$$

$$[N_\perp \to [S \to S]] \xrightarrow{\mathcal{E}[\![e]\!]} [S \to S]$$

継続を使った文の表示

- 文の抽象構文 $c \in \mathrm{Cmd}$
  - $c ::= \mathrm{null} \mid x \coloneqq e \mid \mathrm{if}\,(e_1 = e_2)\; c_1 \;\mathrm{else}\; c_2 \mid \mathrm{while}\,(e_1 = e_2)\; c \mid c_1; c_2$
- Cmd の表示
  - $C = [S \to S]$
  - $\mathcal{C} \in \mathrm{Cmd} \to [C \to C]$

$$[S \to S] \xrightarrow{\mathcal{C}[\![c]\!]} [S \to S]$$

- $\mathcal{C}[\![c]\!]\theta\sigma = \theta(\sigma')$
  - 文 c を状態 σ で実行すると，状態が σ' となり，継続 θ に渡される
- $\mathcal{C}[\![\mathrm{null}]\!]\theta = \theta$
- $\mathcal{C}[\![c_1; c_2]\!]\theta = \mathcal{C}[\![c_1]\!](\mathcal{C}[\![c_2]\!]\theta)$
- $\mathcal{C}[\![x \coloneqq e\,]\!]\theta = \mathcal{E}[\![e]\!]\big(\lambda n.\lambda\sigma.\theta(\sigma[n/x])\big)$
- $\mathcal{C}[\![\mathrm{if}\,(e_1 = e_2)\; c_1 \;\mathrm{else}\; c_2]\!]\theta = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\Big(\lambda n_1.\mathcal{E}[\![e_2]\!]\big(\lambda n_2.\mathrm{cond}(n_1 = n_2, \mathcal{C}[\![c_1]\!]\theta, \mathcal{C}[\![c_2]\!]\theta)\big)\Big)$
- $\mathcal{C}[\![\mathrm{while}\,(e_1 = e_2)\; c]\!] = \mathrm{fix}\Bigg(\lambda w.\lambda\theta.\mathcal{E}[\![e_1]\!]\Big(\lambda n_1.\mathcal{E}[\![e_2]\!]\Big(\lambda n_2.\mathrm{cond}\big(n_1 = n_2, \mathcal{C}[\![c]\!](w(\theta)), \theta\big)\Big)\Big)\Bigg)$

継続を使った式の表示

- 式の抽象構文 $e \in \mathrm{Exp}$
  - $n \in N$
  - $v \in \mathrm{Var}$
  - $e ::= n \mid v \mid e_1 + e_2 \mid e_1 - e_2 \mid e_1 * e_2 \mid e_1 / e_2 \quad \mid v + +$
- Exp の表示
  - $\mathcal{E} \in \mathrm{Exp} \to [K \to C]$
  - $K = [N_\perp \to C]$
- $\mathcal{E}[\![e]\!]\kappa\sigma = \kappa(n)(\sigma')$
  - 状態 σ で式 e 値を計算し，その結果 n を更新された状態 σ' とともに κ に渡す
- $\mathcal{E}[\![n]\!]\kappa\sigma = \kappa(n)(\sigma)$
- $\mathcal{E}[\![v]\!]\kappa\sigma = \kappa(\sigma[\![v]\!])\sigma$
- $\mathcal{E}[\![e_1 + e_2]\!]\kappa\sigma = \mathcal{E}[\![e_1]\!]\left(\lambda n_1.\mathcal{E}[\![e_2]\!]\left(\lambda n_2.\kappa(n_1 + n_2)\right)\right)\sigma$
- $\mathcal{E}[\![v + +]\!]\kappa\sigma = \kappa(\sigma[\![v]\!])\sigma[\sigma[\![v]\!] + 1/v]$

λ式の領域

- $D \cong [D \to D]$ となる領域 D を構成する
  - $D_0 = \{\,\cdot\,\}_\perp$
  - $D_1 = [D_0 \to D_0]$
  - $D_2 = [D_1 \to D_1]$
  - $\cdots$
  - $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, shift right, "\iota_0"'] & D_1 \arrow[l, shift right, "\pi_0"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & d_{n+1} \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \\
D_{n-1} \arrow[r, "\iota_{n-1}"] & D_n \arrow[d, "d_{n+1}"] & D_{n+1} \arrow[l, "\pi_n"'] \\
D_{n-1} \arrow[u, "d_n"] & D_n \arrow[l, "\pi_{n-1}"'] \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & D_{n+1} \\
 & d_n &
\end{tikzcd}$$

  - $D_0 \lhd D_1 \lhd D_2 \lhd D_3 \cdots \lhd D_n \lhd \cdots$
    - $\pi_0 \in D_1 \to D_0 = [D_0 \to D_0] \to D_0$ $\qquad \pi_0(d_1) = d_1(\perp_{D_0})$
    - $\iota_0 \in D_0 \to D_1 = D_0 \to [D_0 \to D_0]$ $\qquad \iota_0(d_0) = \lambda x_1 \in D_0 . d_0$
    - $\pi_n \in D_{n+1} \to D_n = [D_n \to D_n] \to D_n$ $\qquad \pi_n(d_{n+1}) = \pi_{n-1} \circ d_{n+1} \circ \iota_{n-1}$
    - $\iota_n \in D_n \to D_{n+1} = D_n \to [D_n \to D_n]$ $\qquad \iota_n(d_n) = \iota_{n-1} \circ d_n \circ \pi_{n-1}$
  - $D_\infty = \{\,(d_0, d_1, \cdots, d_n, \cdots) \mid d_n \in D_n\,,\ \pi_n(d_{n+1}) = d_n\}$
    - $D_n \lhd D_\infty$
    - $D_\infty \cong [\mathrm{D}_\infty \to D_\infty]$

λ式の表示

- λ式の抽象構文 $M \in \Lambda$
  - $x \in \mathrm{Var}$
  - $M ::= x \mid \lambda x. M \mid M_1\ M_2$

- $D_\infty \cong [\mathrm{D}_\infty \to D_\infty]$
  - $\pi \in [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty$
  - $\iota \in D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$

- λ式の表示
  - $\sigma \in S = \mathrm{Var} \to D_\infty$
  - $\mathcal{L} \in \Lambda \to [S \to D_\infty]$

- $\mathcal{L}[\![x]\!]\sigma = \sigma[\![x]\!]$
- $\mathcal{L}[\![\lambda x. M]\!]\sigma = \pi(\lambda v \in D_\infty. \mathcal{L}[\![M]\!]\sigma[v/x])$
- $\mathcal{L}[\![M_1\ M_2]\!]\sigma = \iota(\mathcal{L}[\![M_1]\!]\sigma)(\mathcal{L}[\![M_2]\!]\sigma)$

$$\mathcal{L}[\![Y]\!]\sigma = \pi\left(\lambda v \in D_\infty. \mathrm{fix}\big(\iota(v)\big)\right)$$

まとめ

- プログラミング言語の意味
  - 公理的意味
  - 操作的意味
  - 表示的意味

- 表示的意味
  - 意味関数（表示）
  - 継続
  - D_∞