

情報数学

第13回 極限と関手

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

始対象と終対象

- 始対象 (initial object) I
 - すべての対象 A に対して唯一の射が存在する

$$I \overset{!}{\dashrightarrow} A$$

- 終対象 (final object) F
 - すべての対象 A から唯一の射が存在する

$$A \overset{!}{\dashrightarrow} F$$

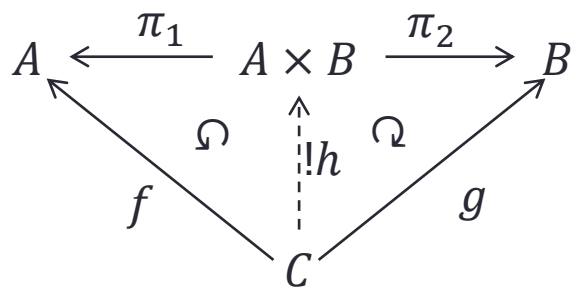
	始対象	終対象
Set	$\emptyset$	$\{\cdot\}$
Grp	$\{e\}$	$\{e\}$
CPO		$\{\perp\}$
半順序集合	$\perp$	$\top$

直積と直和

- $A \times B$ は A と B の直積 (product) $\Leftrightarrow$

- 射 $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ と $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ が存在する
- 任意の対象 C と射 $f: C \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ に対して,

次の図を可換にする射 $h: C \rightarrow A \times B$ が唯一存在する



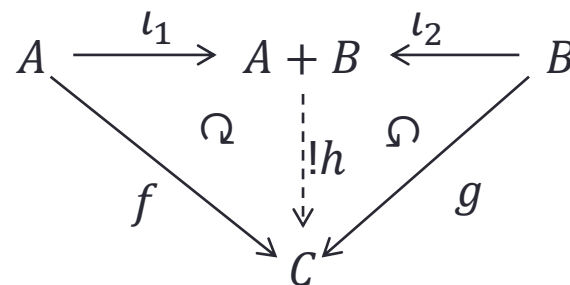
$$\pi_1 \circ h = f$$

$$\pi_2 \circ h = g$$

- $A + B$ は A と B の直和 (co-product) $\Leftrightarrow$

- 射 $\iota_1: A \rightarrow A + B$ と $\iota_2: B \rightarrow A + B$ が存在する
- 任意の対象 C と射 $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$ に対して,

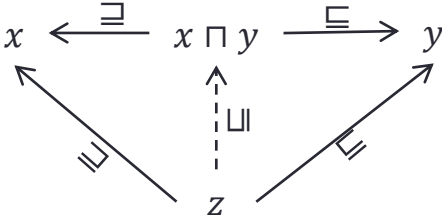
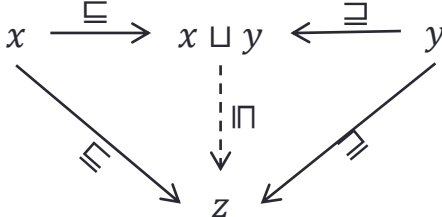
次の図を可換にする射 $h: A + B \rightarrow C$ が唯一存在する



$$h \circ \iota_1 = f$$

$$h \circ \iota_2 = g$$

直積と直和

	直積	直和
Set	• $A \times B = \{(x, y) x \in A \text{ かつ } y \in B\}$ • $\pi_1((x, y)) = x$ • $\pi_2((x, y)) = y$ • $f: C \rightarrow A$ および $g: C \rightarrow B$ のとき $h(z) = (f(z), g(z))$	• $A + B = \{(x, 1) x \in A\} \cup \{(y, 2) y \in B\}$ • $\iota_1(x) = (x, 1)$ • $\iota_2(y) = (y, 2)$ • $f: A \rightarrow C$ および $g: B \rightarrow C$ のとき $h((x, 1)) = f(x)$, $h((y, 2)) = g(y)$
半順序集合 ($D, \sqsubseteq$)	• $x \times y = x \sqcap y$ • $\pi_1: x \sqcap y \sqsubseteq x$ • $\pi_2: x \sqcap y \sqsubseteq y$ • $f: z \sqsubseteq x$ および $g: z \sqsubseteq y$ のとき $h: z \sqsubseteq x \sqcap y$ 	• $A + B = x \sqcup y$ • $\iota_1: x \sqsubseteq x \sqcup y$ • $\iota_2: y \sqsubseteq x \sqcup y$ • $f: x \sqsubseteq z$ および $g: y \sqsubseteq z$ のとき $h: x \sqcup y \sqsubseteq z$ 

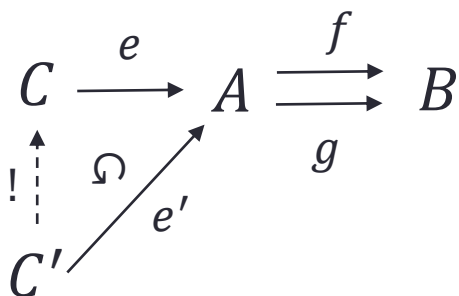
- **定理:** 直積 $A \times B$ は存在すれば, 同型を除いてユニークである.
- **双対の定理:** 直和 $A + B$ は存在すれば, 同型を除いてユニークである.

equalizer と co-equalizer

• C は $A \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} B$ の equalizer

- 射 $e: C \rightarrow A$ が存在し, $f \circ e = g \circ e$ を満たす
- 任意の対象 C' と射 $e': C' \rightarrow A$ が $f \circ e' = g \circ e'$ を満たすとき

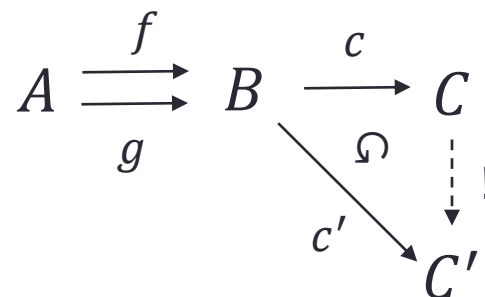
次の図を可換にする射 $!: C' \rightarrow C$ が唯一存在する



• C は $A \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{smallmatrix} B$ の co-equalizer

- 射 $c: B \rightarrow C$ が存在し, $c \circ f = c \circ g$ を満たす
- 任意の対象 C' と射 $c': B \rightarrow C'$ が $c' \circ f = c' \circ g$ を満たすとき

次の図を可換にする射 $!: C \rightarrow C'$ が唯一存在する



pullback と pushout

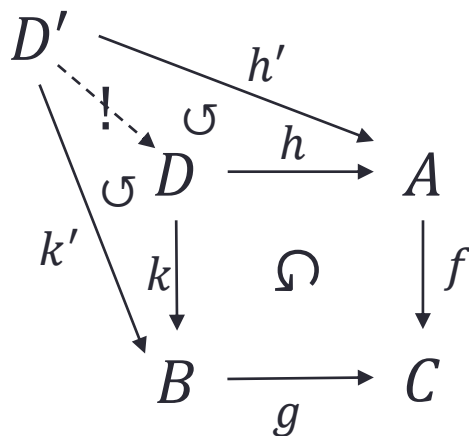
• D は

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

の pullback

- 射 $h: D \rightarrow A$ と $k: D \rightarrow B$ が存在し, $f \circ h = g \circ k$ を満たす
- 任意の対象 D' と射 $h': D' \rightarrow A$, $k': D' \rightarrow B$ が $f \circ h' = g \circ k'$ を満たすとき

次の図を可換にする射 $!: D' \rightarrow D$ が唯一存在する



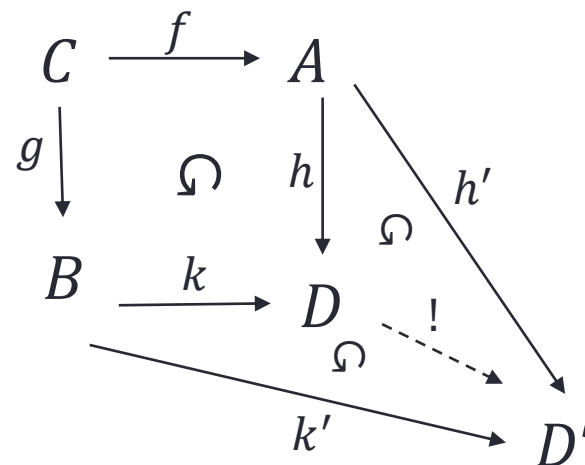
• D は

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

の pushout

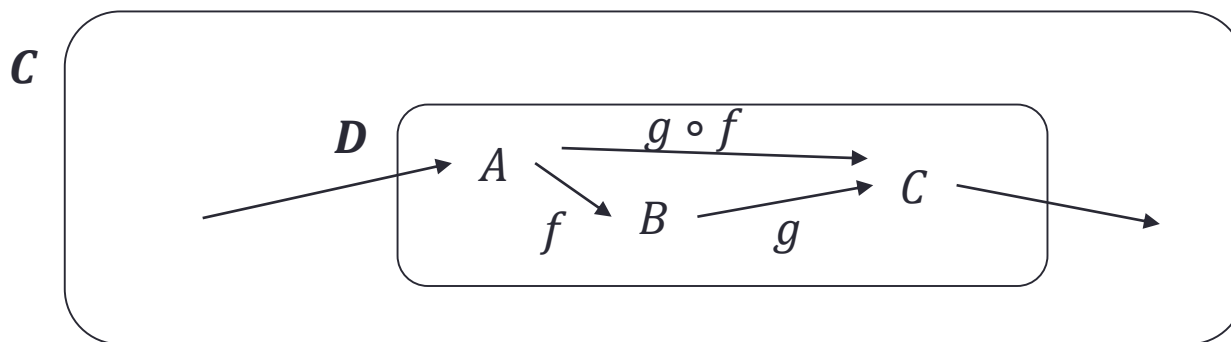
- 射 $h: A \rightarrow D$ と $k: B \rightarrow D$ が存在し, $h \circ f = k \circ g$ を満たす
- 任意の対象 D' と射 $h': A \rightarrow D'$, $k': B \rightarrow D'$ が $h' \circ f = k' \circ g$ を満たすとき

次の図を可換にする射 $!: D \rightarrow D'$ が唯一存在する



部分圏

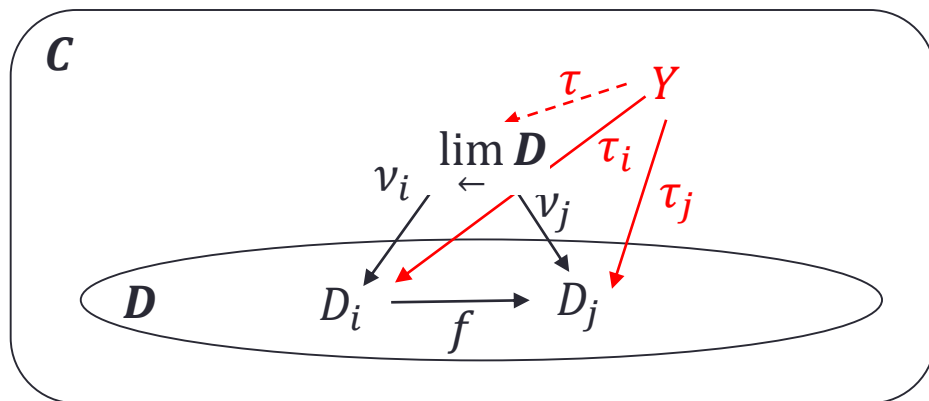
- 圏 C の対象と射の集まり D は次の条件を満たすとき、**部分圏**という。
 - $A \in D$ ならば $A \in C$
 - $f \in D$ で $f: A \rightarrow B$ ならば, $A, B \in D$
 - $A \in D$ ならば $1_A \in D$
 - $f, g \in D$ ならば $g \circ f \in D$



- 部分圏 D はそれだけを見れば圏である.
- これまでに書いた図式はほとんどは部分圏である.

極限 (limit)

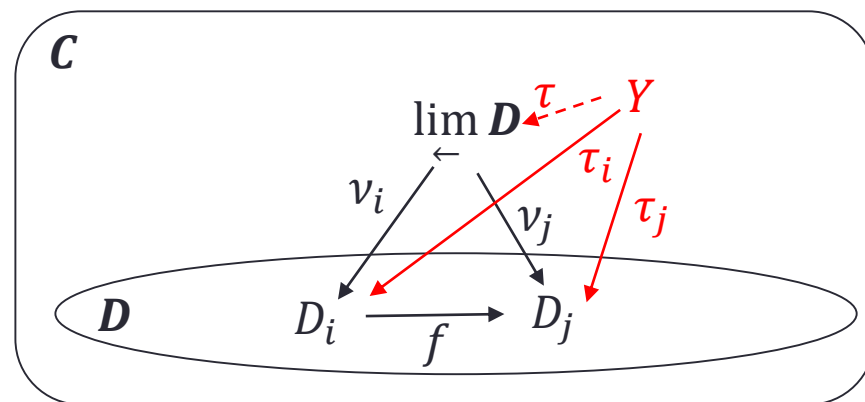
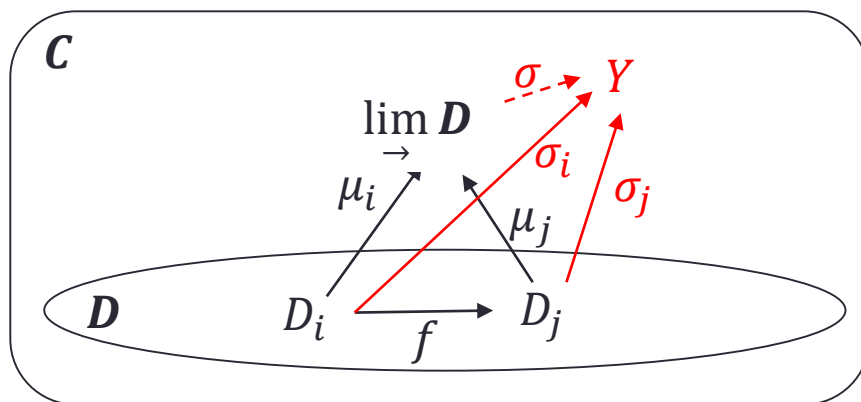
- 圏 C の部分圏 D の極限 (limit) とは, 次の条件を満たす C の対象 X である.
 - X から D のすべての対象 D_i に対して射 $v_i: X \rightarrow D_i$ が存在する.
 - $f \in D$ で $f: D_i \rightarrow D_j$ ならば $f \circ v_i = v_j$
 - C の対象 Y と, Y から D の対象 D_i への射 $\tau_i: Y \rightarrow D_i$ で, $f \in D$, $f: D_i \rightarrow D_j$ に対して $f \circ \tau_i = \tau_j$ であれば, $\tau: Y \rightarrow X$ で $\tau_i = v_i \circ \tau$ となるような τ が唯一存在する.



- D の極限 X を $\lim_{\leftarrow} D$ と書く.

余極限 (colimit)

- 圏 C の部分圏 D の余極限 (colimit) とは, 次の条件を満たす C の対象 X である.
 - X から D のすべての対象 D_i に対して射 $\mu_i: D_i \rightarrow X$ が存在する.
 - $f \in D$ で $f: D_i \rightarrow D_j$ ならば $\mu_j \circ f = \mu_i$
 - C の対象 Y と, D の対象 D_i から Y への射 $\sigma_i: D_i \rightarrow Y$ で, $f \in D$, $f: D_i \rightarrow D_j$ に対して $\sigma_j \circ f = \sigma_i$ であれば, $\sigma: X \rightarrow Y$ で $\sigma_i = \sigma \circ \mu_i$ となるような σ が唯一存在する.



- D の余極限 X を $\lim_{\rightarrow} D$ と書く.

$\lim_{\rightarrow} D$ と $\lim_{\leftarrow} D$ は双対

帰納的極限と射影的極限

- 帰納的極限 (inductive limit)

- 次の図式の余極限 (colimit)

$$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow \dots$$

$\lim_{\rightarrow} D_i$

- 射影的極限 (projective limit)

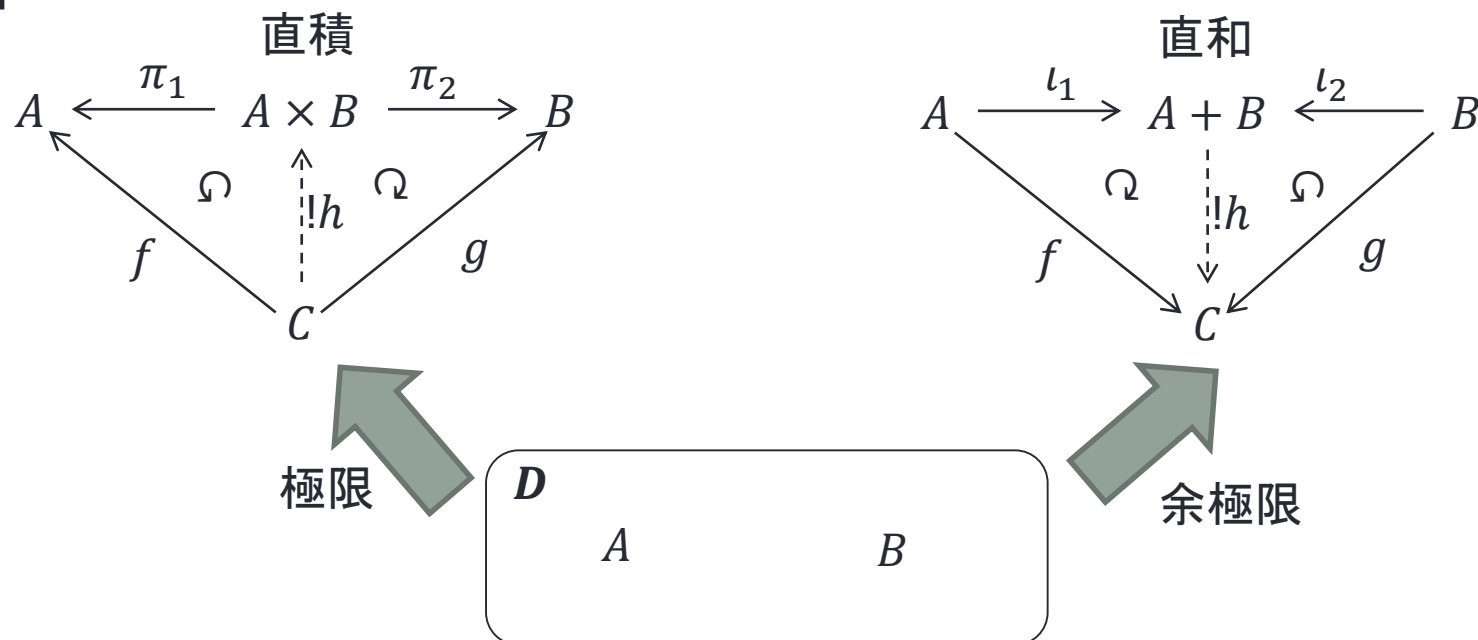
- 次の図式の極限 (limit)

$$D_0 \longleftarrow D_1 \longleftarrow D_2 \longleftarrow D_3 \longleftarrow \dots$$

$\lim_{\leftarrow} D_i$

すべては極限と余極限

・積と和

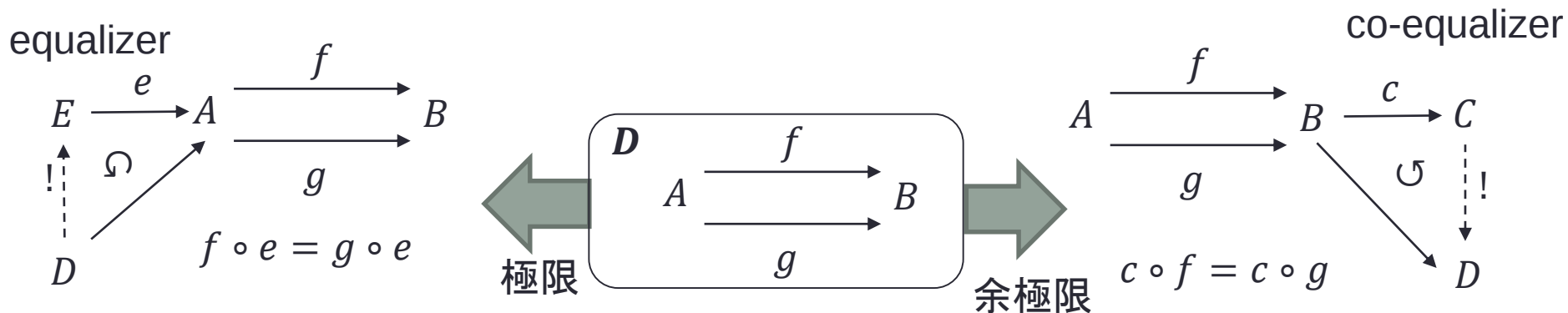


・終対象と始対象

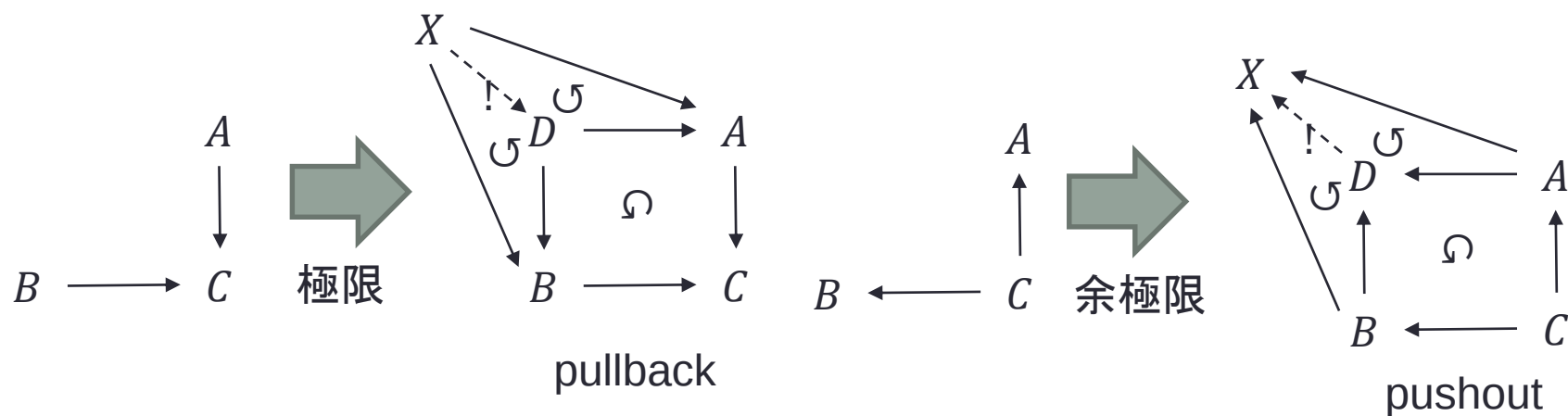


すべては極限と余極限

- equalizer と co-equalizer



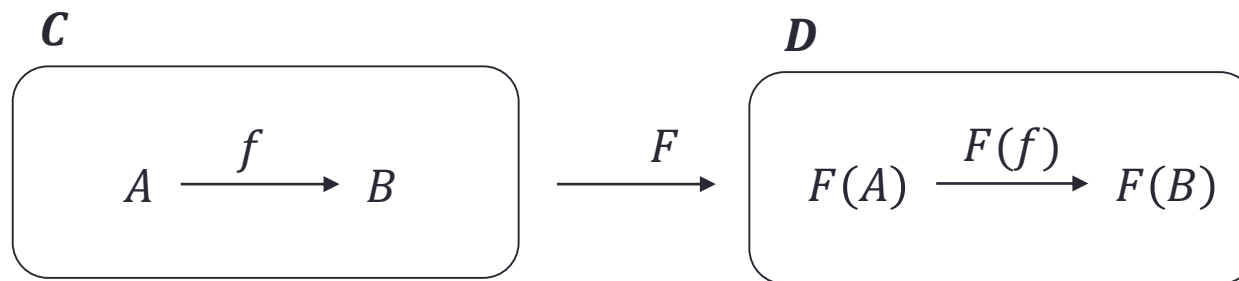
- pullback と pushout



関手 (Functor)

- 圏 $\mathcal{C}$ から 圏 $\mathcal{D}$ への関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, $F(A) \in \mathcal{D}$
- 射 $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対して, $F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in \mathcal{D}$



- $A \in \mathcal{C}$ に対して, $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C \in \mathcal{C}$ に対して, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

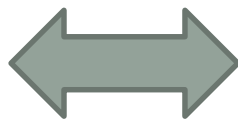
$$F(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{F(1_A)} \\ \xrightarrow{1_{F(A)}} \end{array} F(A)$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ & \searrow F(g \circ f) & \downarrow F(g) \\ & & F(C) \end{array} \quad \text{with a curved arrow } \circlearrowright \text{ from } F(A) \text{ to } F(C)$$

関手(例)

- 忘却関手 (forgetful functor)

- 構造を忘れる関手
- $G: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$
 - $G((S, \cdot, e, {}^{-1})) = S$
 - $G(f) = f$



- 自由関手 (free functor)

- 構造を与える関手
- $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$
 - $F(S) = S$ から生成された自由群
 - $F(f) = f$ を群の準同型に自然に拡張

- 半群間の関手

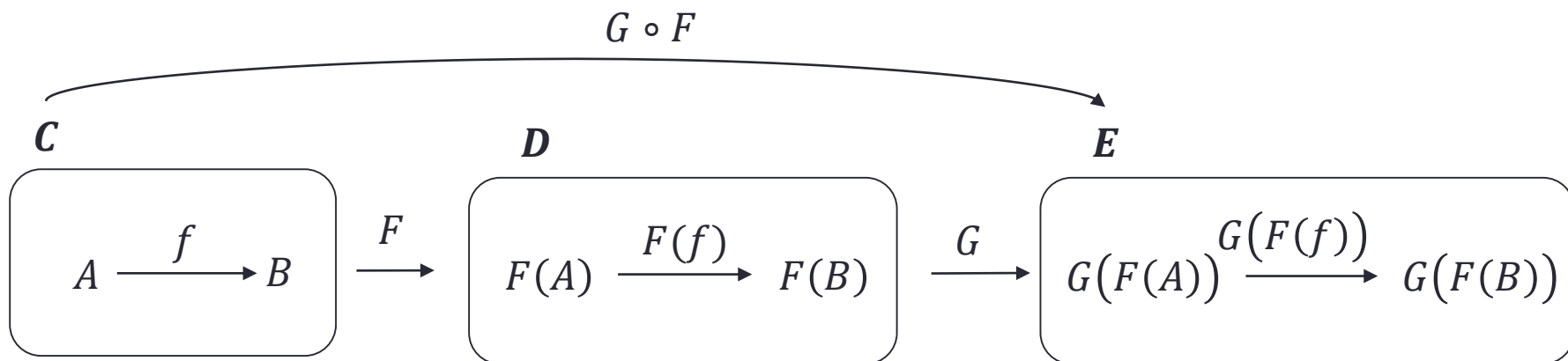
- $F: (M, \cdot, e) \rightarrow (N, \cdot, e)$
- $F(e) = e$
- $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$
- 半群関の準同型

- 半順序集合間の関手

- $F: (D, \sqsubseteq) \rightarrow (E, \sqsubseteq)$
- $x \sqsubseteq y$ ならば $F(x) \sqsubseteq F(y)$
- 単調な関数

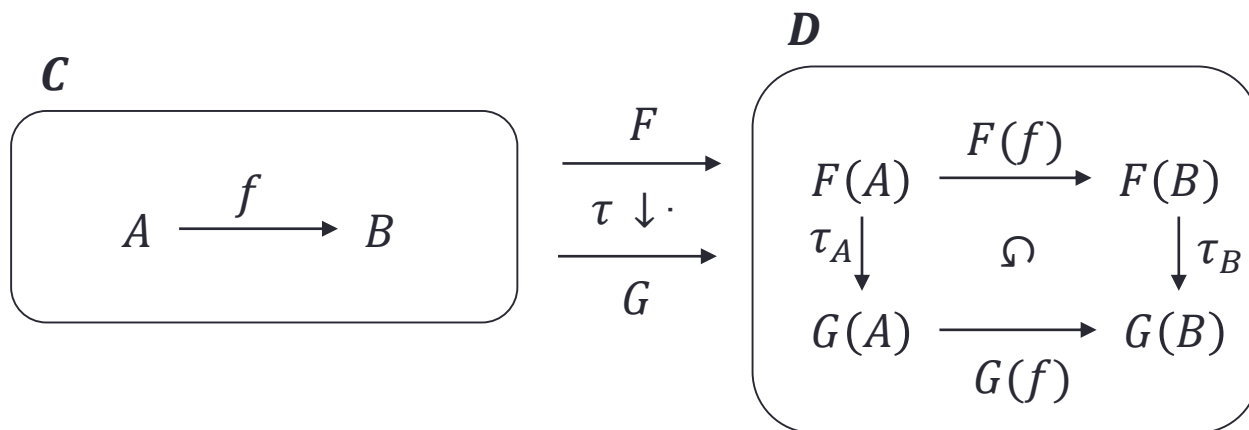
関手の合成

- 関手の合成
 - 圏 C から圏 D への関手 $F: C \rightarrow D$
 - 圏 D から圏 E への関手 $G: D \rightarrow E$
- $G \circ F: C \rightarrow E$
 - $G \circ F(A) = G(F(A))$
 - $G \circ F(f) = G(F(f))$

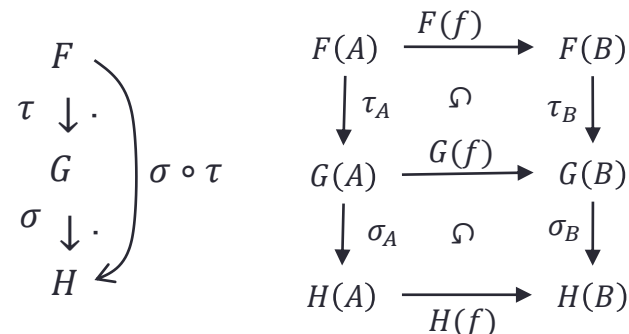


自然変換 (natural transformation)

- 圏 C から圏 D への2つの関手 $F, G: C \rightarrow D$ に対して $\tau: F \rightarrow G$ が**自然変換**であるとは:
 - 対象 $A \in C$ に対して, D の射 $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$ が存在する.
 - 射 $f: A \rightarrow B \in C$ に対して, $\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$ が成り立つ.



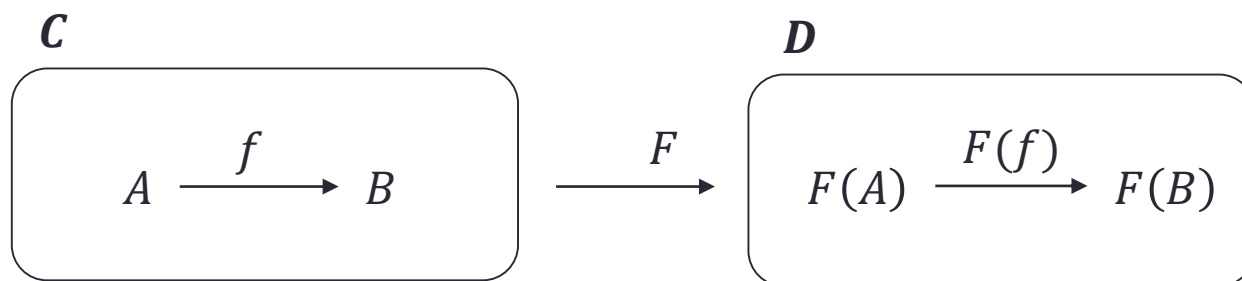
- 圏 D^C
 - 対象: 圏 C から圏 D への関手
 - 射: 関手間の自然変換



共変関手と反変関手

- 共変関手 (covariant functor)

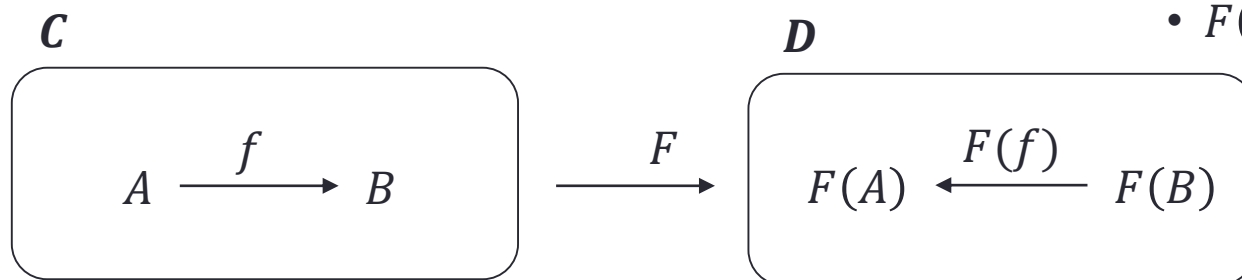
- 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, $F(A) \in \mathcal{D}$
- 射 $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対して, $F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in \mathcal{D}$



- 反変関手 (contravariant functor)

- 対象 $A \in \mathcal{C}$ に対して, $F(A) \in \mathcal{D}$
- 射 $f: A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対して, $F(f): F(B) \rightarrow F(A) \in \mathcal{D}$

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$



- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Hom関手

- 圏 $\mathcal{C}$ に対して, その射の集合を対応させる関手
- $\text{hom}_{\mathcal{C}}(-, -): \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$
 - $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B): A$ から B への射の集合
 - $f: A' \rightarrow A$ と $g: B \rightarrow B'$ に対して, $\text{hom}_{\mathcal{C}}(f, g): \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(A', B')$ を $\text{hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(h) = g \circ h \circ f$ で定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{\text{hom}_{\mathcal{C}}(f, g)} & \text{hom}_{\mathcal{C}}(A', B') \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 h: A \rightarrow B & &
 \begin{array}{ccc}
 A' & \dashrightarrow & B' \\
 f \downarrow & & \uparrow g \\
 A & \xrightarrow{\quad h \quad} & B
 \end{array}
 \end{array}$$

まとめ

- 極限と余極限
 - 部分カテゴリー
 - すべては極限と余極限
 - equalizer, co-equalizer
 - pullback, pushout
- 関手
 - 共変関手と反変関手
 - 自然変換