

情報数学

第14回 随伴とデータ型

Tatsuya Hagino

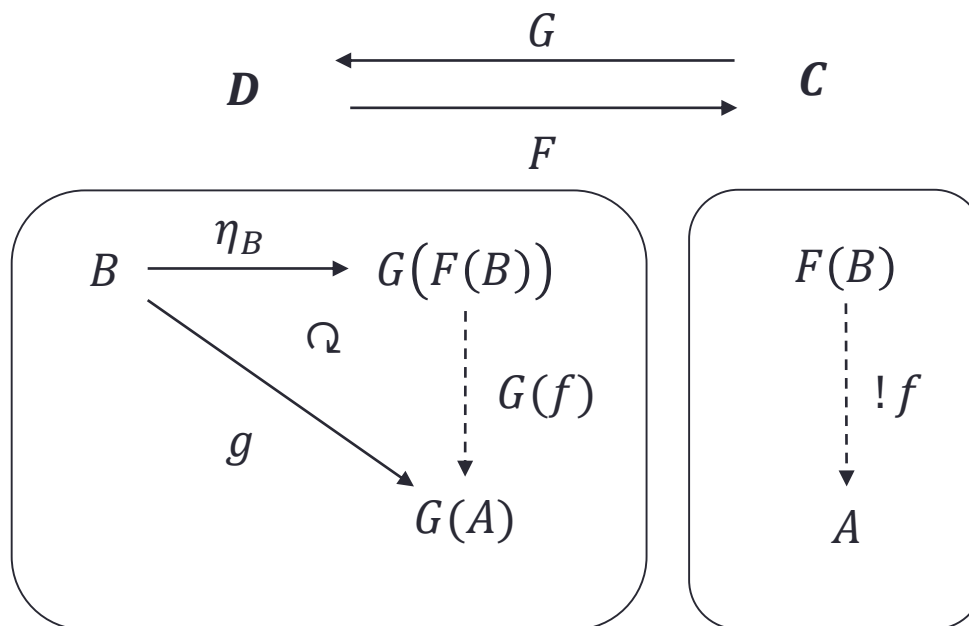
hagino@sfc.keio.ac.jp

Slides URL

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

左随伴関手 (left adjoint functor)

- 圏 C から圏 D への関手 $G: C \rightarrow D$ の左随伴関手 (left adjoint functor) $F: D \rightarrow C$ とは
 - D の対象 B に対して単位 (unit) 射 $\eta_B: B \rightarrow G(F(B))$ が存在する.
 - C の対象 A と D の射 $g: B \rightarrow G(A)$ に対して,
次の図式を可換にする C の射 $f: F(B) \rightarrow A$ が一意的存在する.

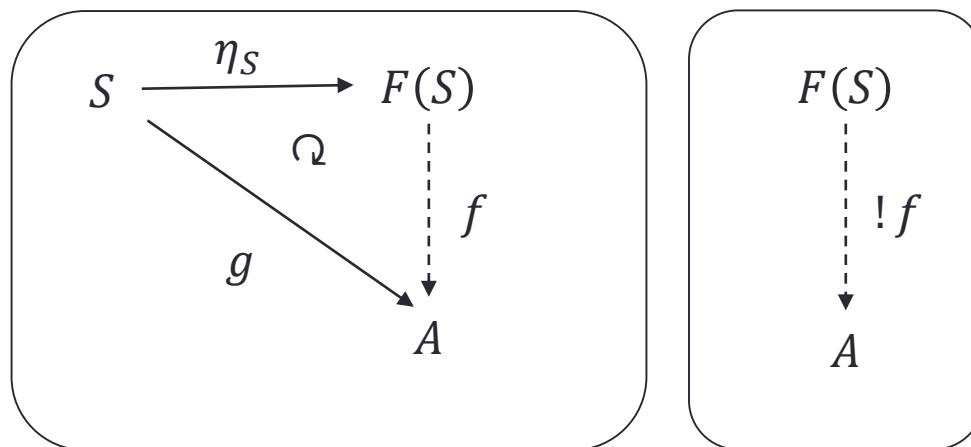


左随伴関手の例

- 集合の圏 Set と半群の圏 $Semi$ の間には, 構造を忘れる忘却関手 (forgetful functor) がある.
 - $G: Semi \rightarrow Set$
 - $G((S, \cdot, e)) = S$
 - $G(f) = f$
- G の左随伴関手が与えられた集合から生成される自由半群を対応させる自由関手 (free functor) である.
 - $F: Set \rightarrow Semi$
 - $F(S) = S$ から生成された自由群
 - $F(f) = f$ を半群の準同型に自然に拡張

$$Set \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{F} \end{array} Semi$$

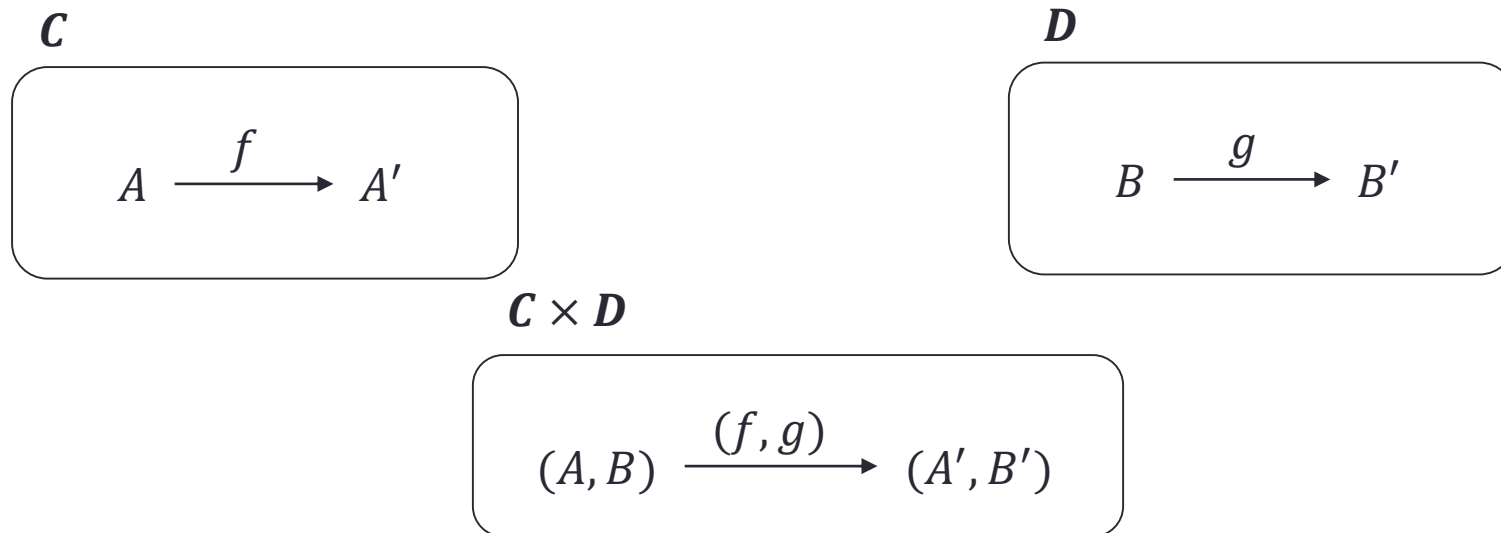
- η_S は包含写像 (inclusion map)



圏の積

- 圏 $\mathcal{C}$ と圏 $\mathcal{D}$ の積の圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$

- 対象: $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$ に対して, $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$
- 射: $f: A \rightarrow A' \in \mathcal{C}, g: B \rightarrow B' \in \mathcal{D}$ に対して, $(f, g): (A, B) \rightarrow (A', B') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$



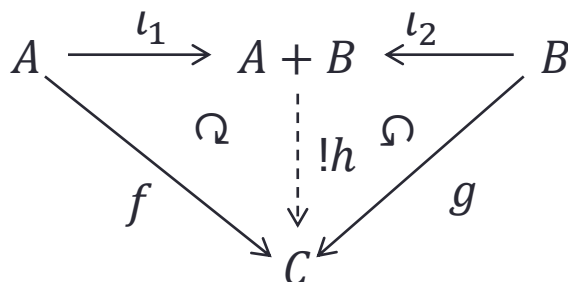
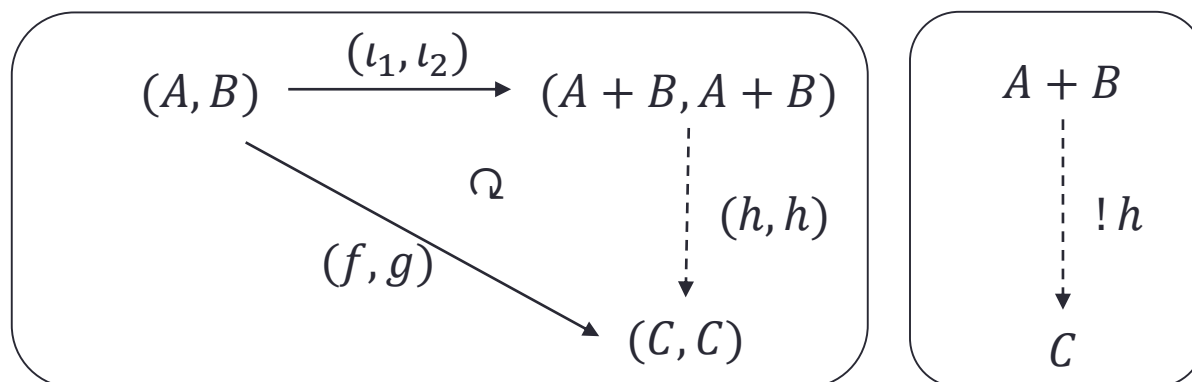
- 圏 $\mathcal{C}$ と圏 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ への対角線関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

- $\Delta(A) = (A, A)$
- $\Delta(f) = (f, f)$

直和は対角線関手の左随伴関手

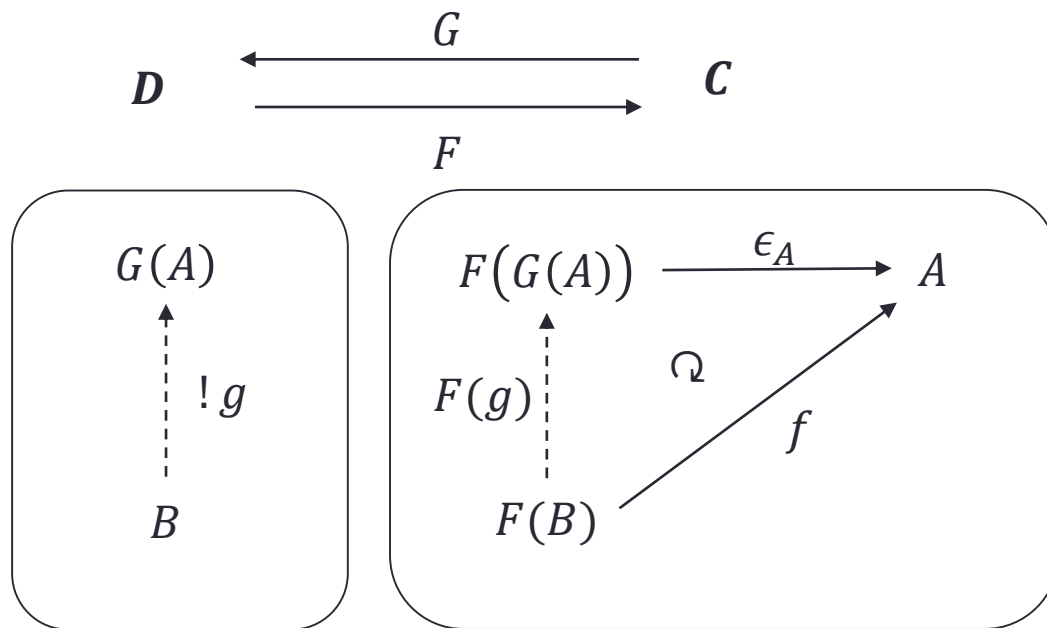
- 対角線関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の左随伴関手は直和 $+: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ になる.

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \begin{array}{c} \xleftarrow{\Delta} \\ \xrightarrow{+} \end{array} \mathcal{C}$$



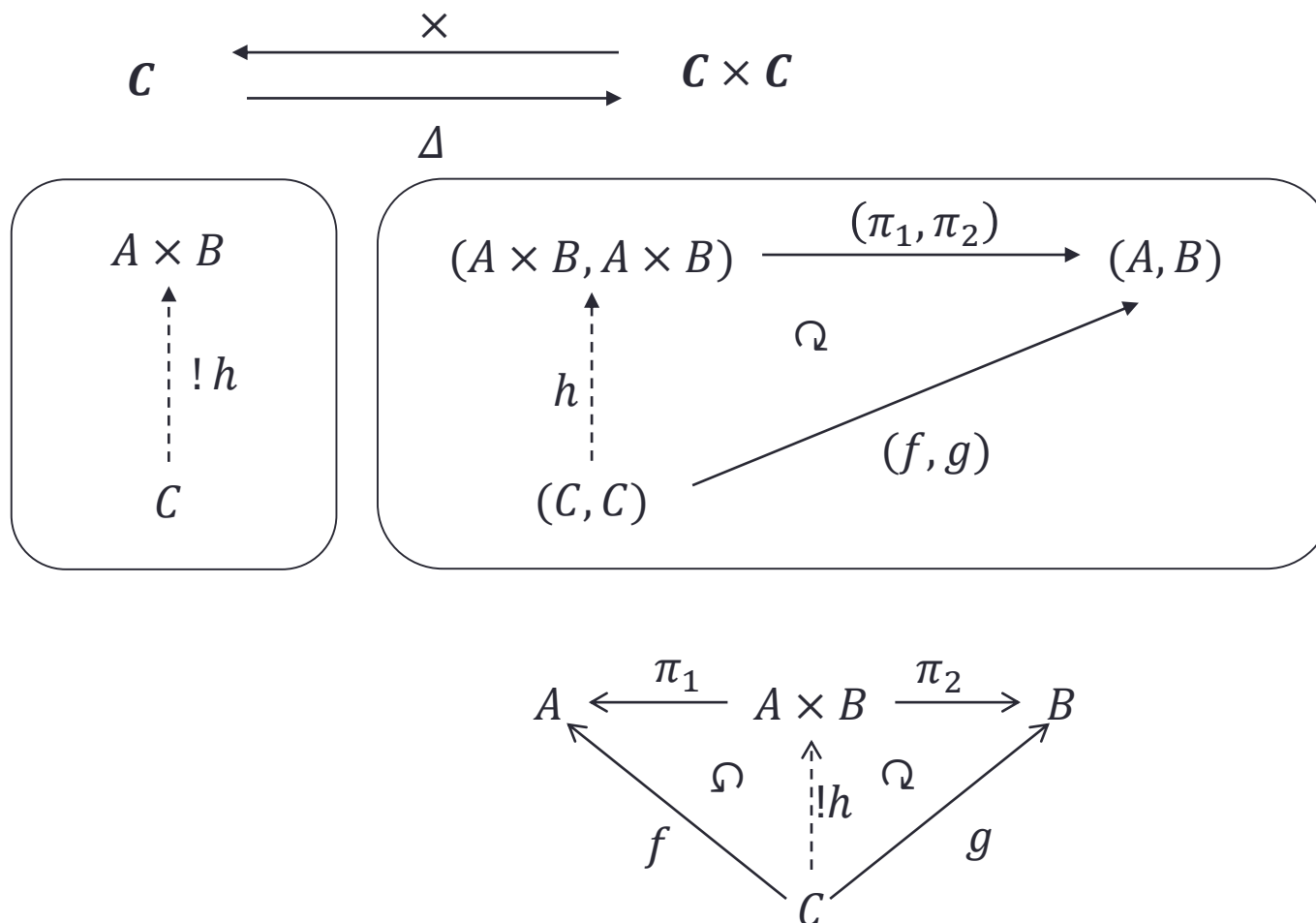
右随伴関手 (right adjoint functor)

- 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ の右随伴関手 (right adjoint functor) $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ とは
 - $\mathcal{C}$ の対象 A に対して余単位 (co-unit) 射 $\epsilon_A: F(G(A)) \rightarrow A$ が存在する.
 - $\mathcal{D}$ の対象 B と $\mathcal{C}$ の射 $f: F(B) \rightarrow A$ に対して,
次の図式を可換にする $\mathcal{D}$ の射 $g: B \rightarrow G(A)$ が一意的に存在する.



直積は対角線関手の右随伴関手

- 対角線関手 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ の右随伴関手は直積 $\times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ になる.



左随伴関手と右随伴関手

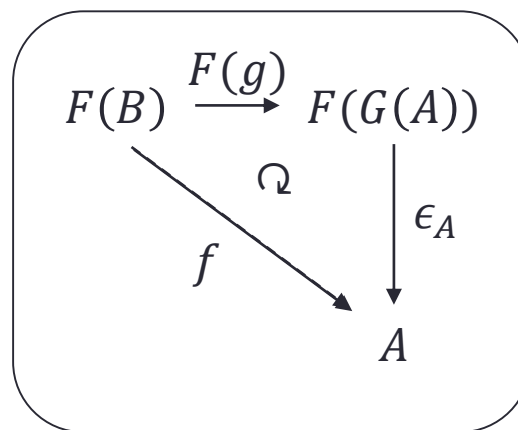
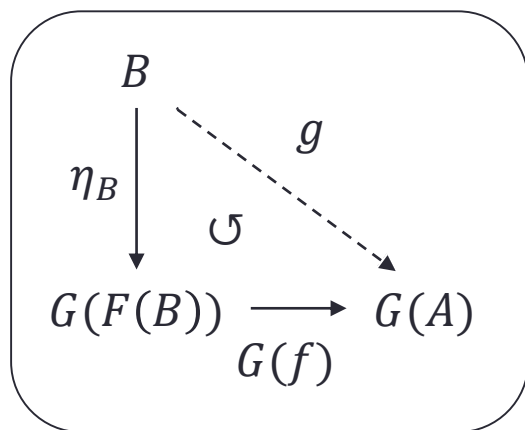
$$D \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{F} \end{array} C$$

- 左随伴関手

- 圏 D の $g: B \rightarrow G(A)$ に対して, 圏 C の $f: F(B) \rightarrow A$ が一意的に決まる

- 右随伴関手

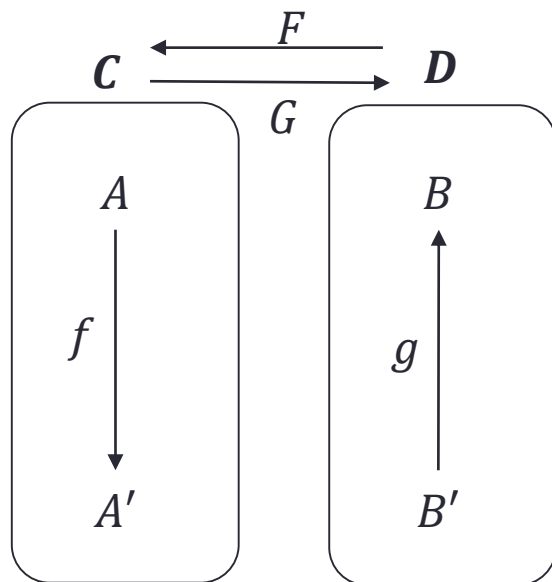
- 圏 C の $f: F(B) \rightarrow A$ に対して, 圏 D の $g: B \rightarrow G(A)$ が一意的に決まる



$$\mathrm{hom}_D(B, G(A)) \cong \mathrm{hom}_C(F(B), A)$$

随伴 (adjunction)

- 圏 $\mathcal{C}$ から 圏 $\mathcal{D}$ の随伴 (adjunction)
 - 左随伴関手 (left adjoint functor) $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$
 - 右随伴関手 (right adjoint functor) $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$
 - $\text{hom}_{\mathcal{C}}(F(B), A) \simeq \text{hom}_{\mathcal{D}}(B, G(A))$ が $A \in \mathcal{C}$ と $B \in \mathcal{D}$ に対して自然な同型となっている.
 - $F \dashv G$ と書かれる



$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(F(-), -) \simeq \text{hom}_{\mathcal{D}}(-, G(-)): \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(B), A) & \xleftarrow{\cong} & \text{hom}_{\mathcal{D}}(B, G(A)) \\
 \downarrow \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(g), f) & \circlearrowleft & \downarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(g, G(f)) \\
 \text{hom}_{\mathcal{C}}(F(B'), A') & \xleftarrow{\cong} & \text{hom}_{\mathcal{D}}(B', G(A'))
 \end{array}$$

すべては随伴

- $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を $\Delta(A) = (A, A)$ とする対角線関手とすると
 - $+ \dashv \Delta \dashv \times$
 - 直和は Δ の左随伴関手
 - 直積は Δ の右随伴関手
- $!: \mathcal{C} \rightarrow \cdot$ を $!(A) = \cdot$ とする関手とすると
 - 始対象は $!$ の左随伴関手
 - 終対象は $!$ の右随伴関手
 - ここで, $\cdot$ は対象が1つ, 射が恒等射だけの圏
- $\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ の部分圏としたとき, $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ を $\Delta(A)(B) = (A)$, $\Delta(A)(f) = 1_A$ とする関手とすると
 - 余極限 $\lim_{\rightarrow} \mathcal{D}$ は Δ の左随伴関手
 - 極限 $\lim_{\leftarrow} \mathcal{D}$ は Δ の右随伴関手
- $(-) \times A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ の右随伴関手 $(-)^A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が関数空間
 - $\text{hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C} \times A, B) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, B^A)$

$$\begin{array}{ccc}
 & B^A & \\
 \text{curry}(f) \uparrow & & \\
 C & & B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & B^A \times A & \xrightarrow{ev} B \\
 \text{curry}(f) \times 1_A \uparrow & \Omega & \nearrow f \\
 C \times A & &
 \end{array}$$

モナド (Monad)

- 圏 $\mathcal{C}$ 上の **モナド** は関手 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ と2つの自然変換 $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ と $\mu: T^2 \rightarrow T$ からなり, 次の条件をみたす:

- $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
- $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & \Omega & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T(T(T(A))) & \xrightarrow{T(\mu_A)} & T(T(A)) \\ \mu_{T(A)} \downarrow & \Omega & \downarrow \mu_A \\ T(T(A)) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

半群の結合法則

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \\ T\eta \downarrow & \Omega & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & T(T(A)) \\ T(\eta_A) \downarrow & \Omega & \downarrow \mu_A \\ T(T(A)) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

半群の単位元の存在

- $F \dashv G$ のとき $T = G \circ F$ はモナドである.

Haskellのモナド

```
class Monad m where
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
```

- Monad クラスのインスタンスがモナド
 - 2つの関数を実装する必要がある.
 - (>>=) は**バインド**(bind)と呼ばれる
- 2つの関数は次の規則を満たしている必要がある.
 - **モナド則**

```
1. (return x) >>= f    = f x
2. m >>= return        = m
3. (m >>= f) >>= g     = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

Haskellのモナドと圏のモナドの対応

```
class Monad m where
```

```
(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

```
return :: a -> m a
```

```
1. (return x) >>= f = f x
```

```
2. m >>= return = m
```

```
3. (m >>= f) >>= g = m >>= (\x -> f x >>= g)
```

圏 $\mathcal{C}$ 上のモナドは関手 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ と2つの自然変換 $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ と $\mu: T^2 \rightarrow T$ からなり、次の条件をみたす:

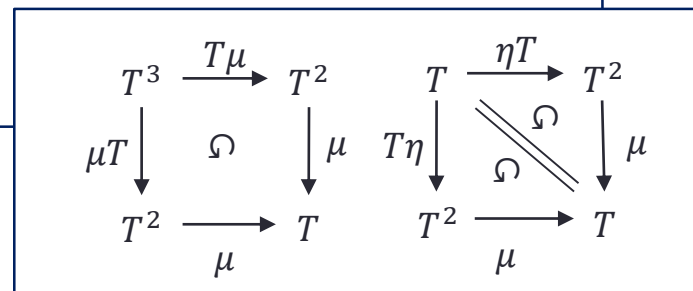
- $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu T$
- $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$

• **`return :: a -> m a` is**

- $\eta_A: A \rightarrow T(A)$

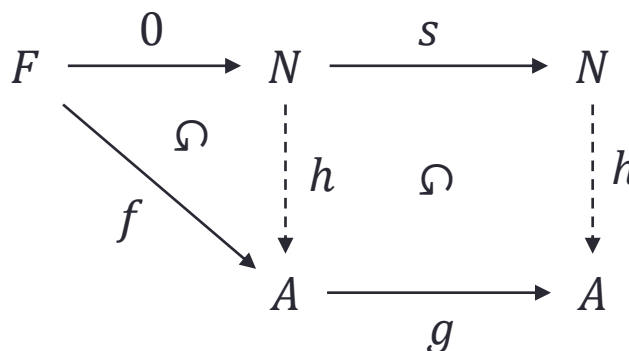
• **`(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b` is**

- $f: A \rightarrow T(B)$ が与えられたとき $T(f): T(A) \rightarrow T(T(B))$ となるので $\mu_B: T(T(B)) \rightarrow T(B)$ と組み合わせた $\mu_B \circ T(f): T(A) \rightarrow T(B)$ を対応させるもの.
- $(A \rightarrow T(B)) \rightarrow (T(A) \rightarrow T(B)) \equiv T(A) \rightarrow (A \rightarrow T(B)) \rightarrow T(B)$



自然数対象 (Natural Number Object)

- N が **自然数対象** (Natural Number Object) であるとは
 - 2つの射がある
 - $0: 1 \rightarrow N$
 - $s: N \rightarrow N$
 - $f: 1 \rightarrow A, g: A \rightarrow A$ に対して, $h: N \rightarrow A$ が唯一存在し
 - $h \circ 0 = f$
 - $h \circ s = g \circ h$
 となる.

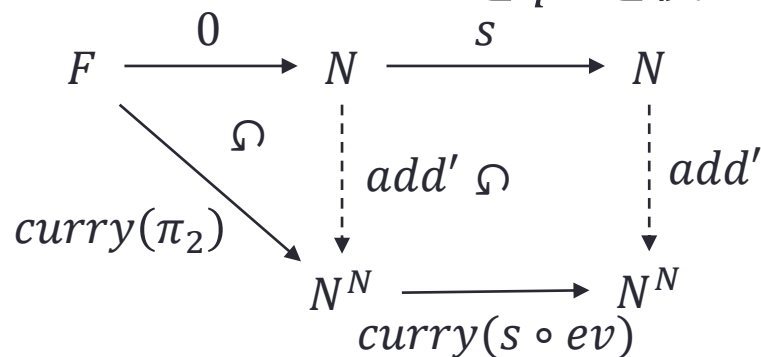


- h を $pr(f, g)$ と書くことにする.

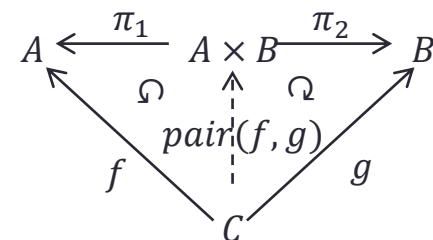
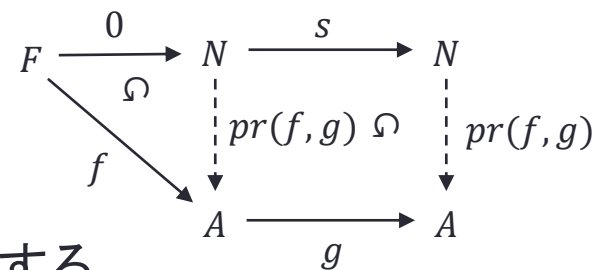
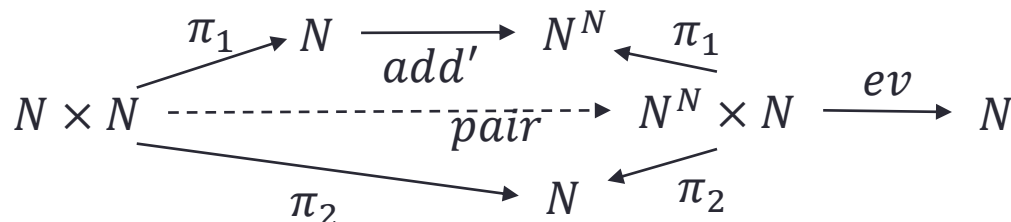
足し算の射の構成

• $add: N \times N \rightarrow N$ の定義

- カリー化した $add': N \rightarrow N^N$ を pr を使って構成する.



- $\pi_2: 1 \times N \rightarrow N$ をカリー化すると $curry(\pi_2): 1 \rightarrow N^N$
- $s \circ ev: N^N \times N \rightarrow N$ をカリー化すると $curry(s \circ ev): N^N \rightarrow N^N$
- $add' = pr(curry(\pi_2), curry(s \circ ev))$

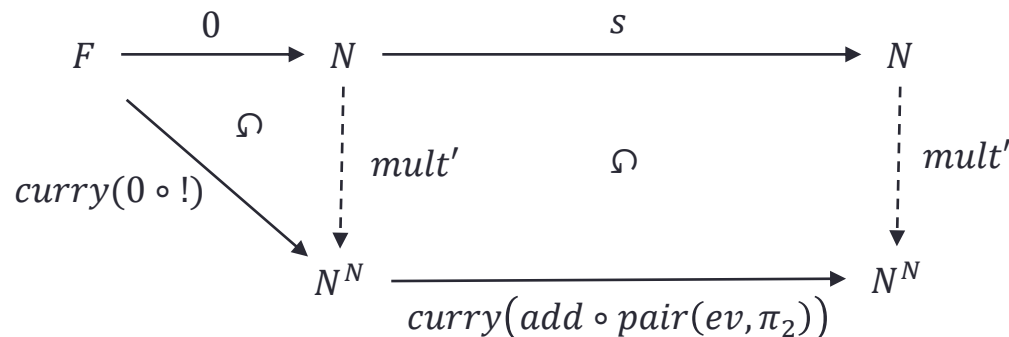


- $add = ev \circ pair(pr(curry(\pi_2), curry(s \circ ev))) \circ \pi_1, \pi_2$

掛け算の射の構成

- $mult: N \times N \rightarrow N$ の定義

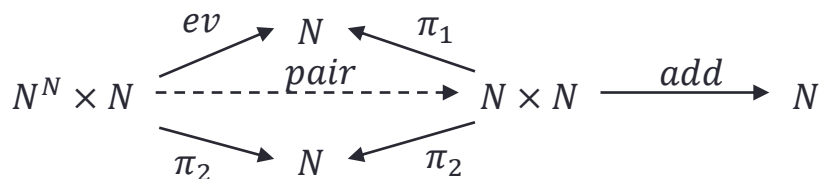
- カリー化した $mult': N \rightarrow N^N$ を pr と add を使って構成する.



- $0 \circ !: F \times N \rightarrow N$ をカリー化すると $\text{curry}(0 \circ !): F \rightarrow N^N$

$$F \times N \xrightarrow{!} F \xrightarrow{0} N$$

- $add \circ \text{pair}(ev, \pi_2): N^N \times N \rightarrow N$ をカリー化すると $\text{curry}(add \circ \text{pair}(ev, \pi_2)): N^N \rightarrow N^N$



- $mult' = pr(\text{curry}(0 \circ !), \text{curry}(add \circ \text{pair}(ev, \pi_2)))$
- $mult = ev \circ \text{pair}(pr(\text{curry}(0 \circ !), \text{curry}(add \circ \text{pair}(ev, \pi_2))) \circ \pi_1, \pi_2)$

まとめ

- 随伴
 - 右随伴関手と左随伴関手
 - 対角線関手と直積と直和
 - 極限と随伴
 - モナド
- 自然数対象