



スクリプト言語プログラミング Pythonによる数値解析

第11回講義資料

箕原辰夫

ベクトル演算

- ベクトルの和
- ベクトルの差
- ベクトルのスカラー積
- ベクトルの内積 (dot product)
- ベクトルの外積 (cross product)

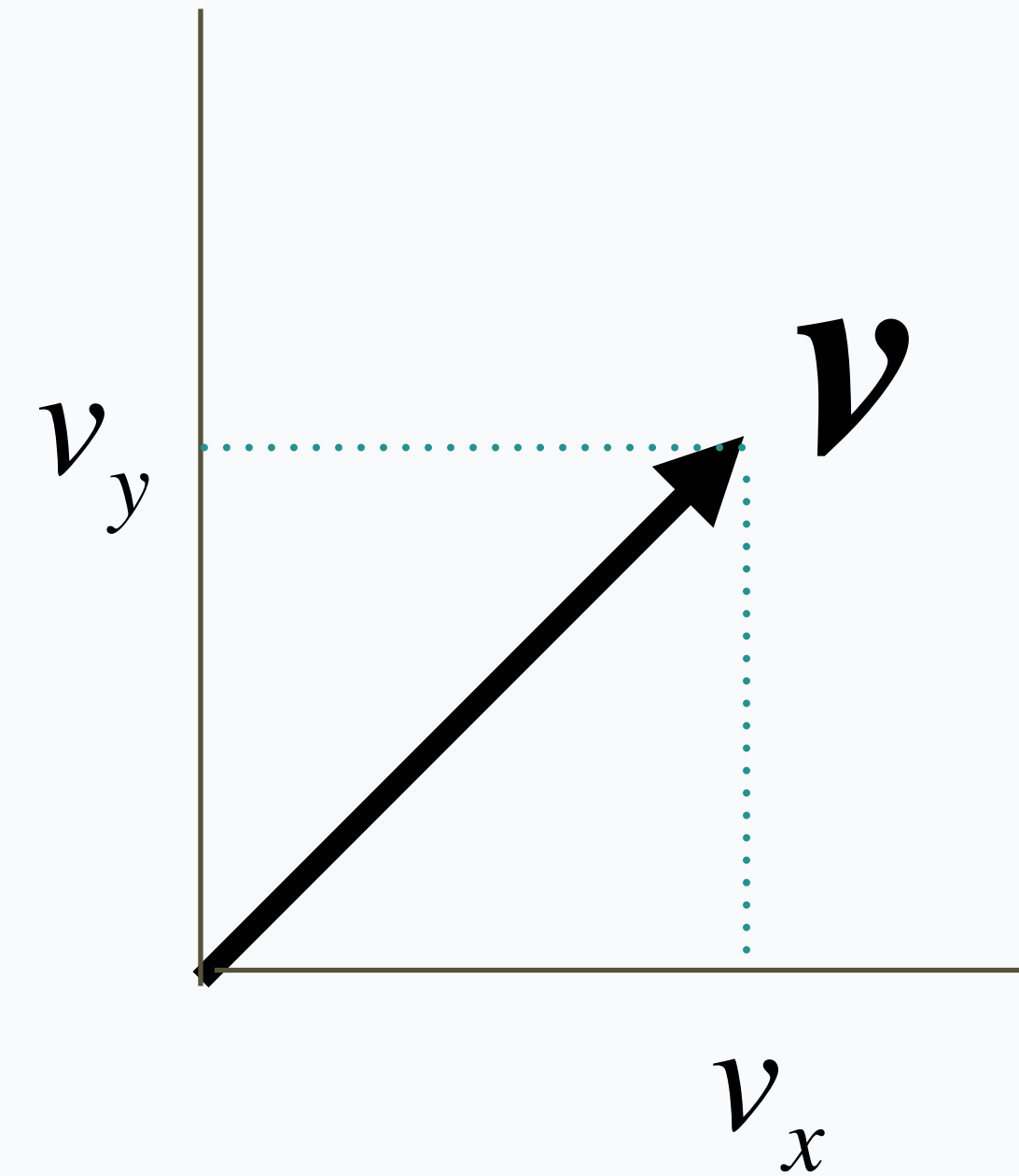
ベクトル (2D Vector)

- 方向と長さを持つ量
- 2次元だとxy座標系の中でそれぞれの成分で表される

$$(v_x, v_y)$$

- 3次元だとxyz直交座標系の中でそれぞれの成分で表される

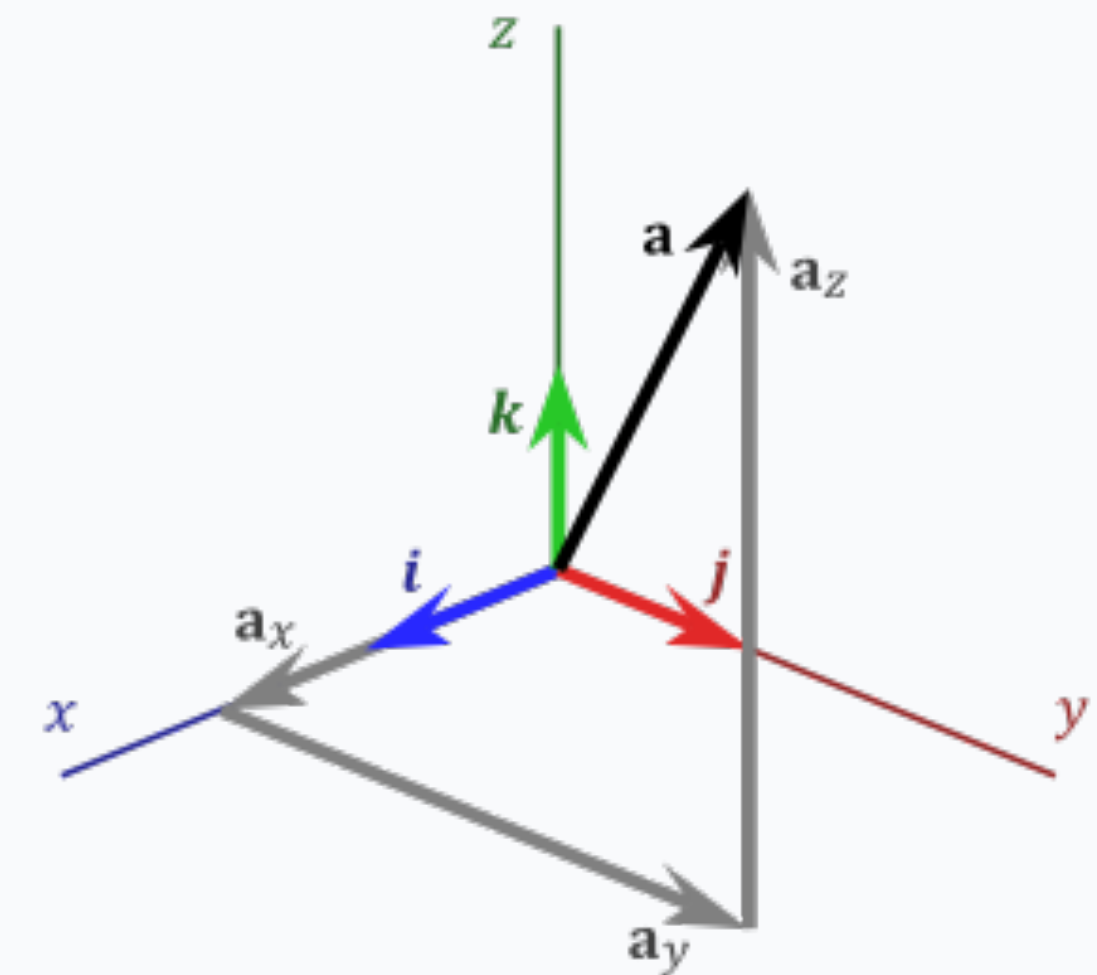
$$(v_x, v_y, v_z)$$



3次元ベクトル 3D Vector

- 2次元も3次元もベクトルの定義は同じ。
- ベクトルは方向と長さを持つ。ただし、3次元ベクトルの場合は、 x, y, z の直交軸の3軸に対して成分を持ちます。また、 x, y, z 方向の単位ベクトル（大きさが1のベクトル）である i, j, k を利用して以下のように定義される。

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$$



Norm of Vector

- ベクトルの大きさは、ベクトルの長さ（あるいは大きさ:magnitude）を示し、ノルム（norm）とも呼ばれていて、 $|a|$ あるいは $||a||$ と標記される。
- ノルムの値を求めるには、各成分の二乗を足して、平方根を取る。

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

様々なベクトルのノルム

- 1ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- 2ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- pノルム

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- 無限大ノルム (infinity norm)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- コーシーシュワルツの不等式
(Cousy-Schwarz inequality)

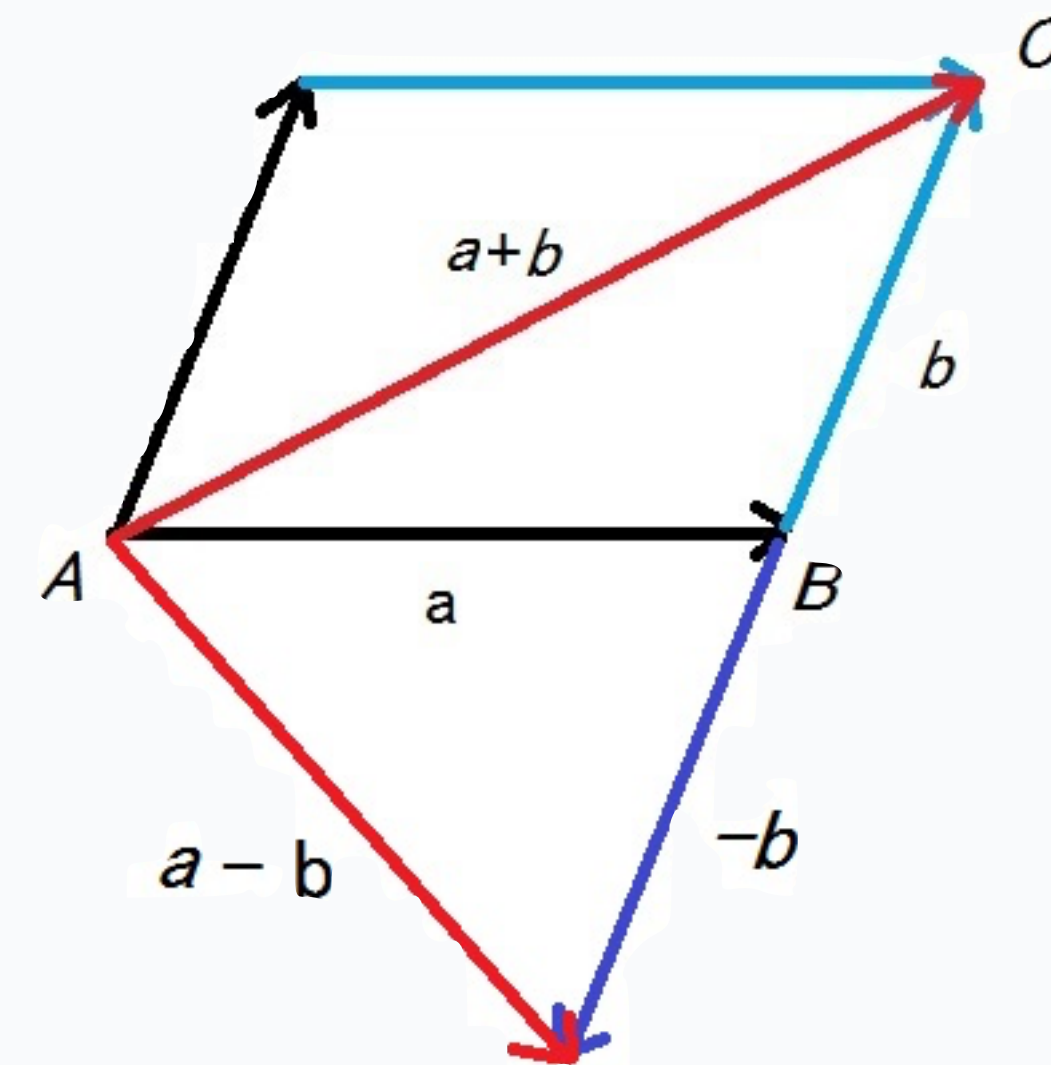
$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

ベクトルの和・差 Add or Subtract Vectors

- ベクトルの和は、それぞれの成分を足すことで求められる。
- ベクトルの差は、それぞれの成分を引くことで求められる。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

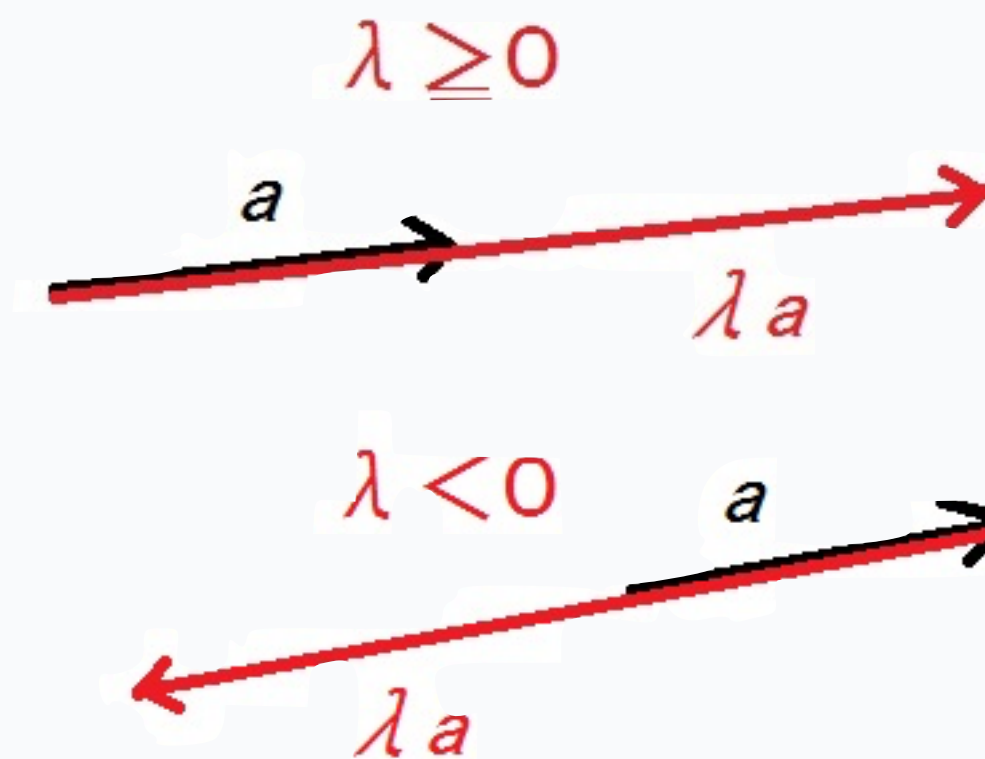
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$



ベクトルのスカラー倍 Scalar multiplication

- ベクトルの方向は、そのままでその大きさを変える演算をベクトルのスカラー倍と呼ぶ。
- λ は通常の実数であり。 λ の値が負の場合は、逆方向を向いたベクトルが求まる。
- スカラー倍は、以下のように成分に λ を掛けて求める。

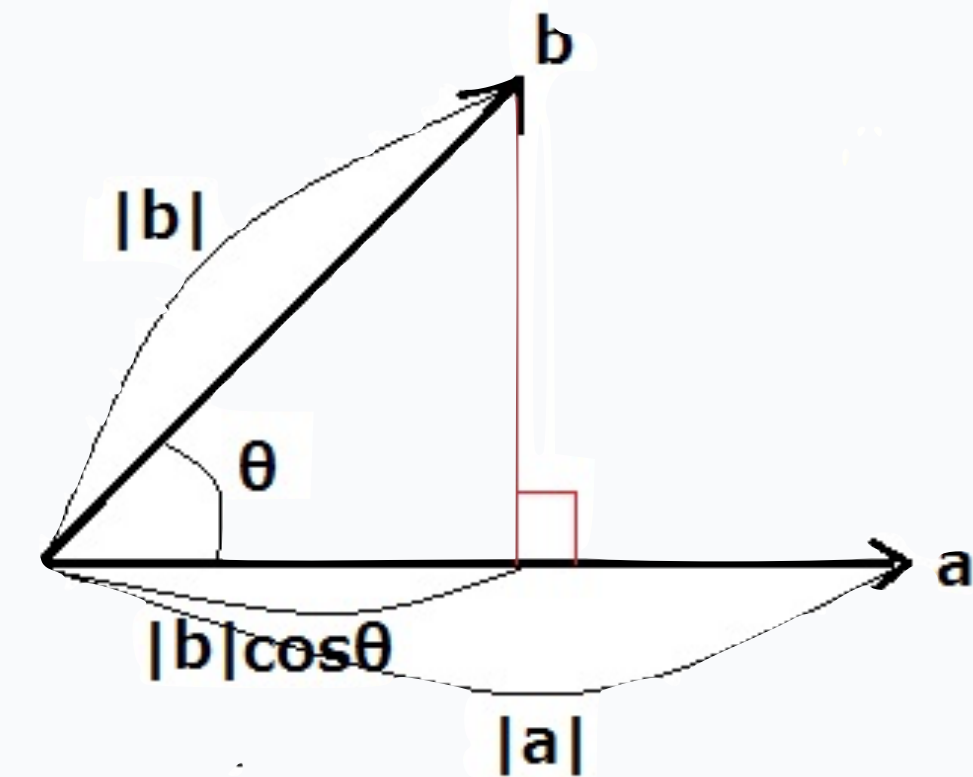
$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$



ベクトルの内積 Dot Product

- 2つのベクトルの内積は、各成分を掛け合わせて足すことで求めることができる。
- 内積は、一方のベクトルへの射影との積になっている。そのため、内積とノルムを利用して、2つのベクトルがなす角度 θ を求めることができる。

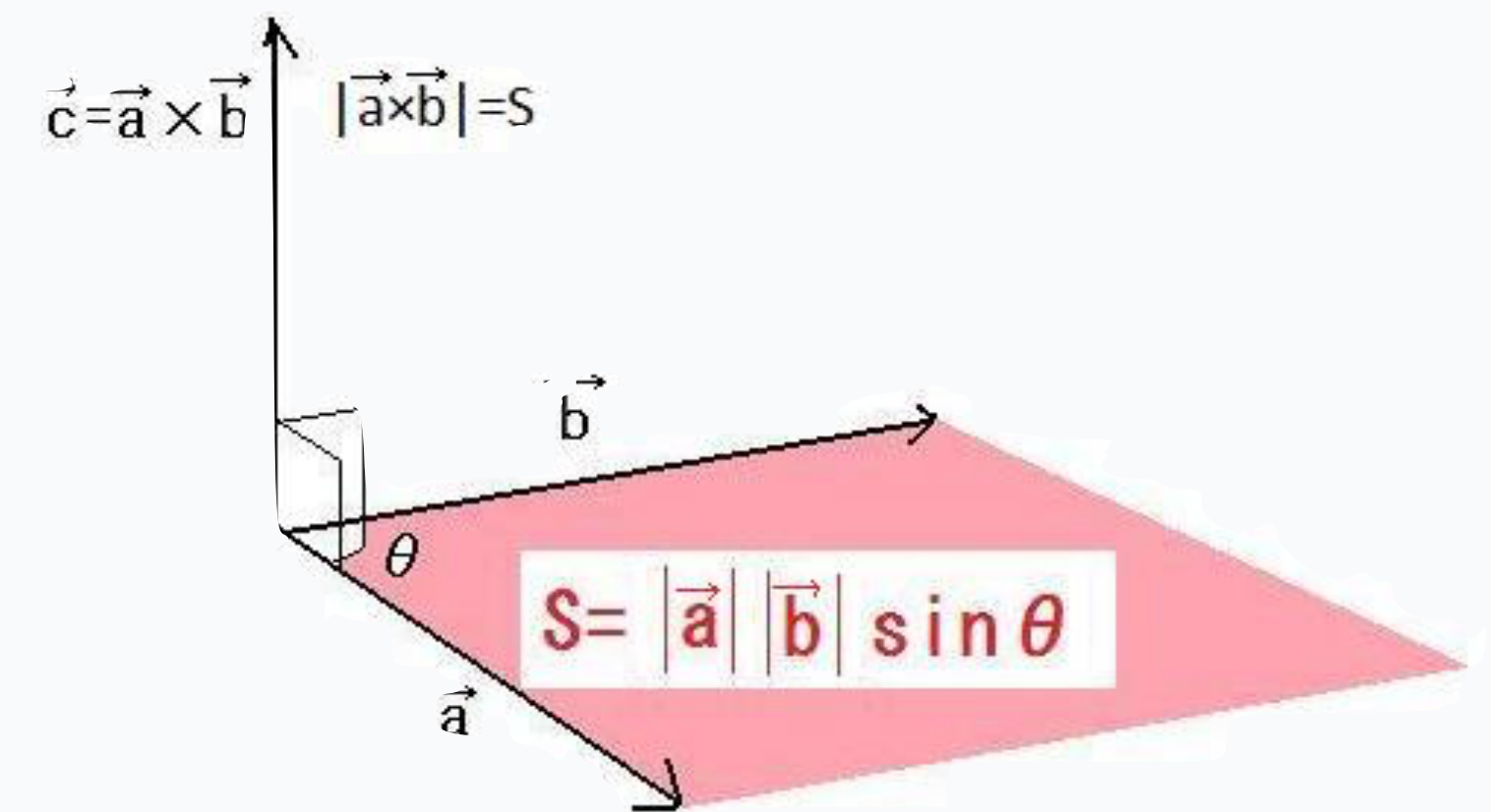
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$



ベクトルの外積 Cross Product

- ベクトルの外積は、2つのベクトルが構成する平面に対する法線ベクトル（垂直なベクトル）を求めることができる。
- その大きさは、構成する平面の面積に等しくなる。

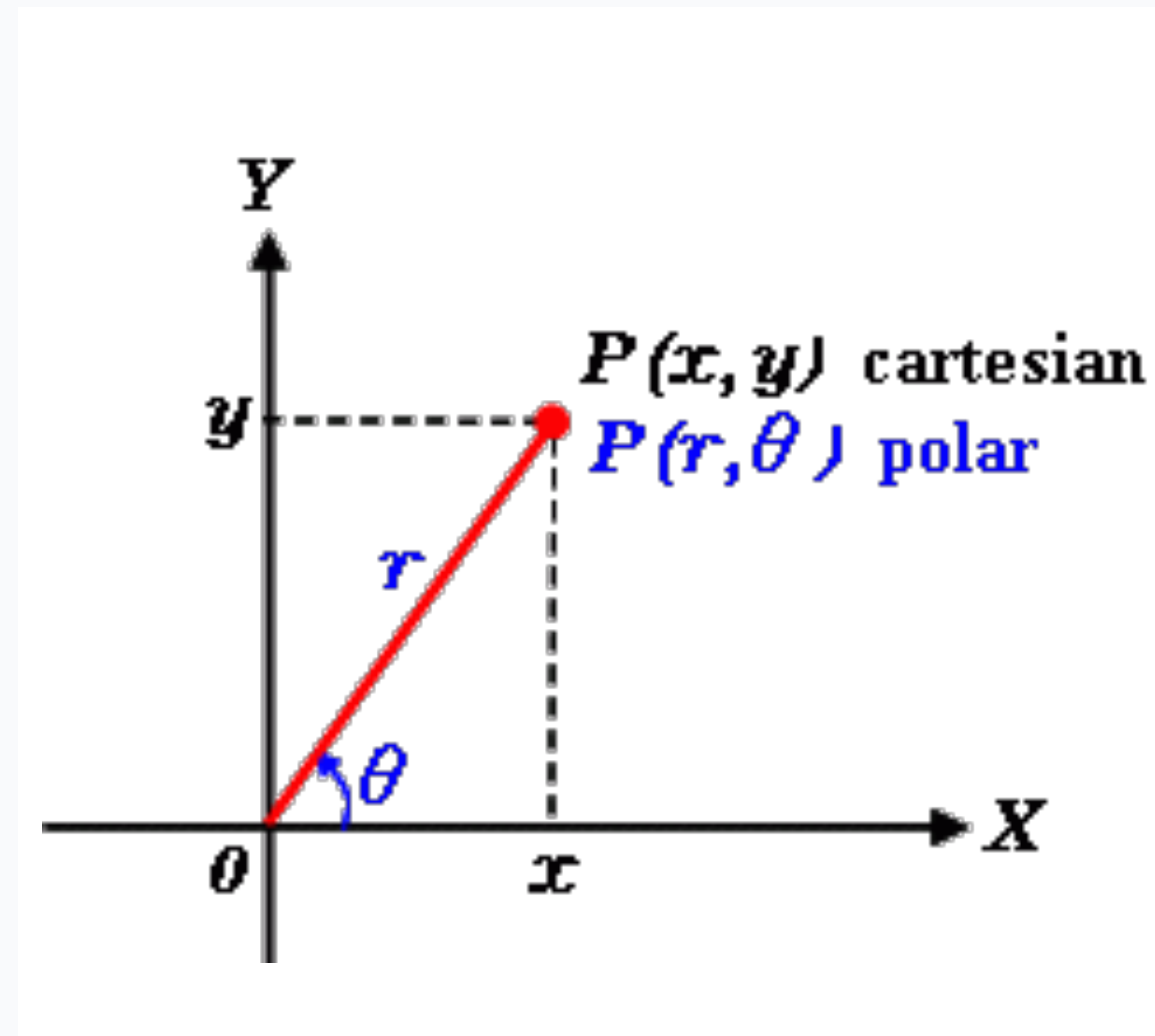
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$



2次元の座標系変換

- 直交座標 $\Leftrightarrow$ 極座標

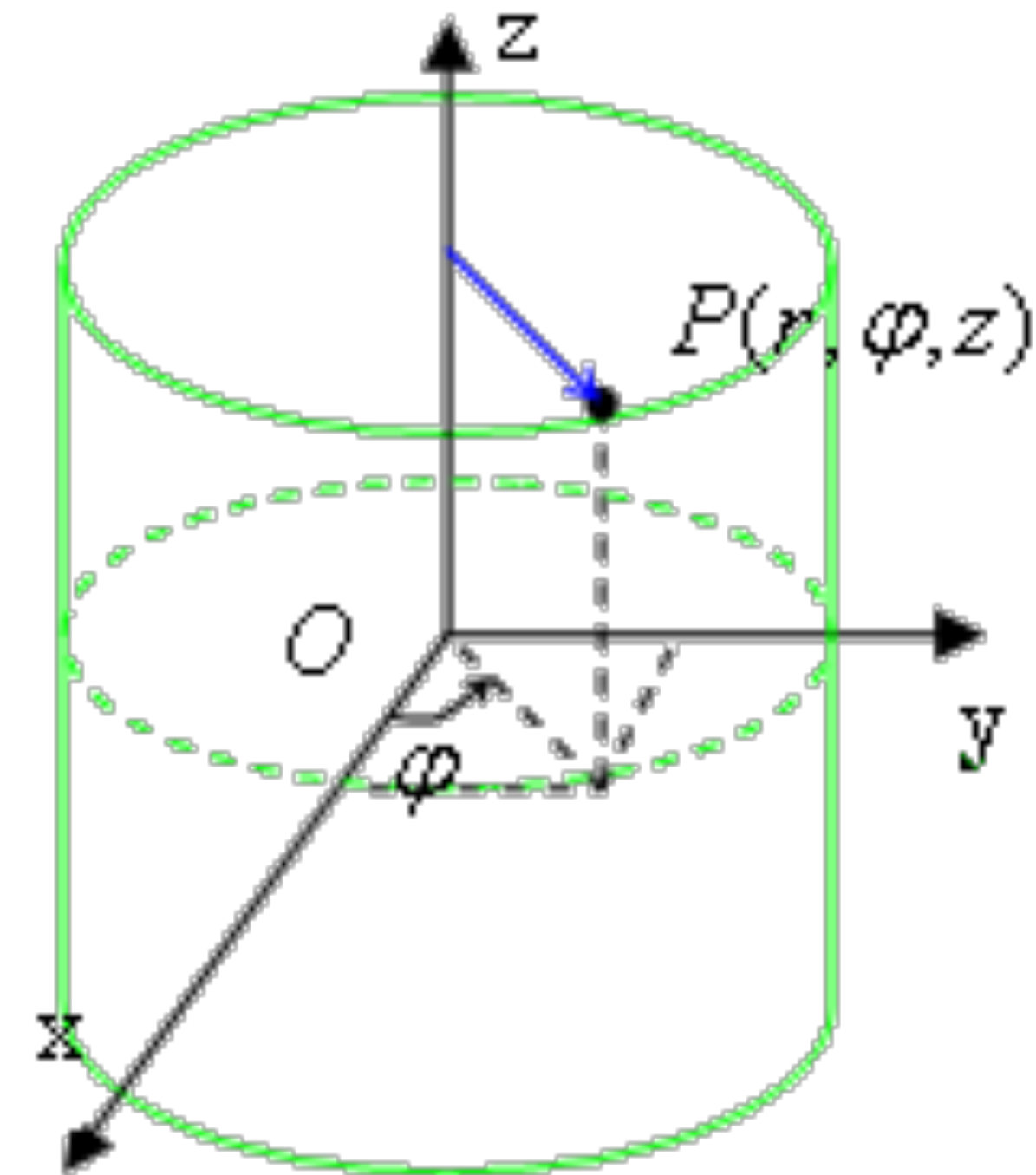
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$



円柱座標系 $\Leftrightarrow$ 直交座標系

- 変換公式

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{array} \right.$$



球面座標系↔直交座標系

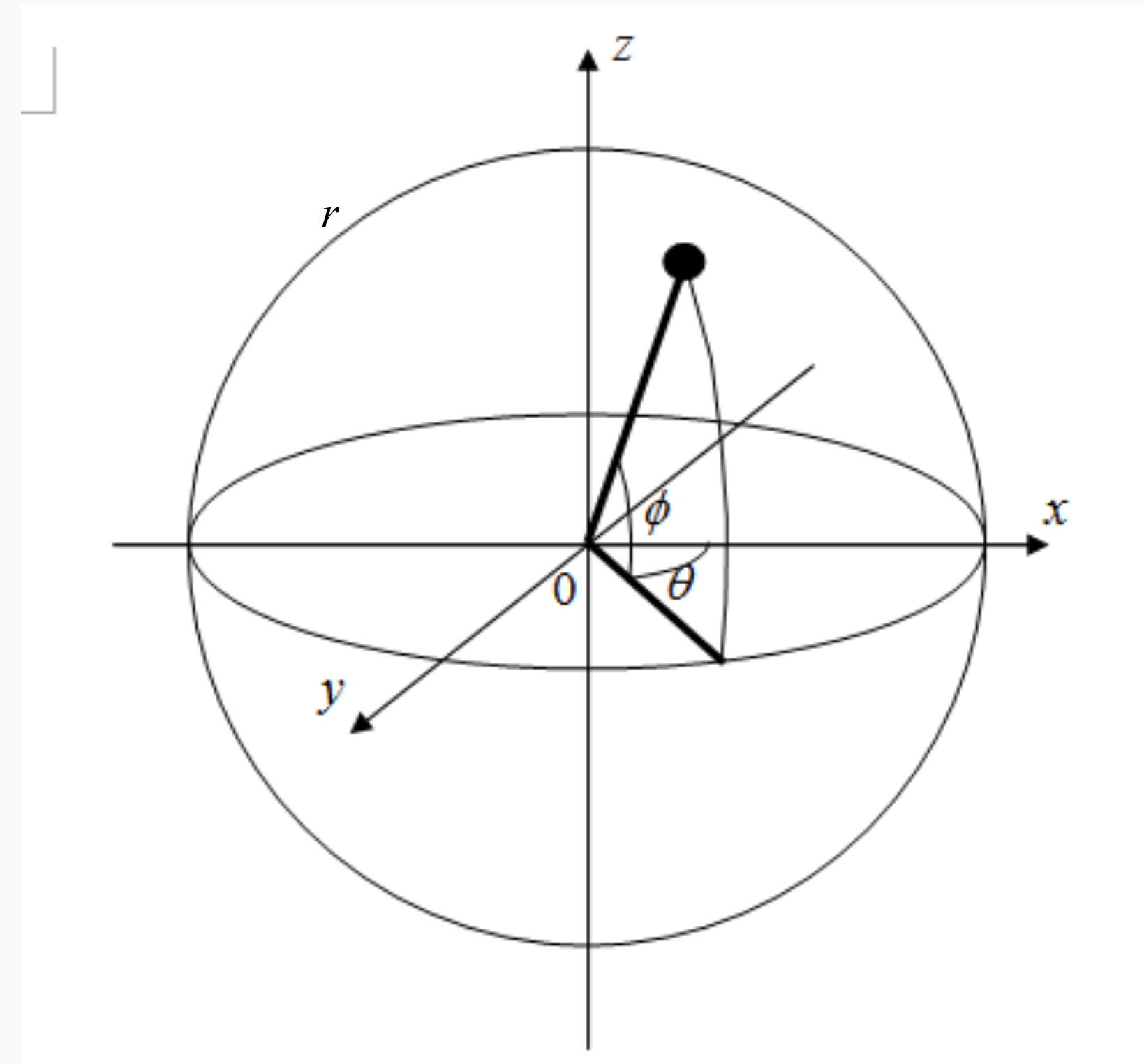
- 變換公式

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \theta \\y &= r \cos \varphi \sin \theta \\z &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{z}{r}$$



行列演算

- 行列は、2次元リストで表現する
- 行列の和・差
- 行列のスカラー倍
- 行列の積
- 転置行列
 - ▶ 転置行列は、元の行列の行と列を入れ替えたもの

$$A^T = [a_{ji}] \text{ where } A = [a_{ij}]$$

行列の和・差・スカラー倍

- 行列の和・差は、個々の要素で行なう
- ただし、2つの行列の行数・列数が一致していなければならない

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

- 行列のスカラー倍は、個々の要素にスカラー値が乗算されるもの

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]$$

行列の積

- 行列の積については、被乗数となる行列の列数と、乗数となる行列の行数があっていなければならない（同じ列数・行数である必要はない）
- 行列の積については、可換則が成り立たない

$$AB \neq BA$$

- Aを $n \times m$ の行列、Bを $m \times p$ の行列とする。各要素は以下で計算

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

正方行列の計算

- 正方行列...行数と列数が同じ行列
- 行列の加算・減算
- 行列の乗算
- 行列のスカラー倍
- 転置行列
- 行列式
- 逆行列
- 固有値

行列のノルム

- m行n列の行列とする

- 1ノルム

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

- 無限大ノルム

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- pノルム...ベクトルのpノルムを用いる

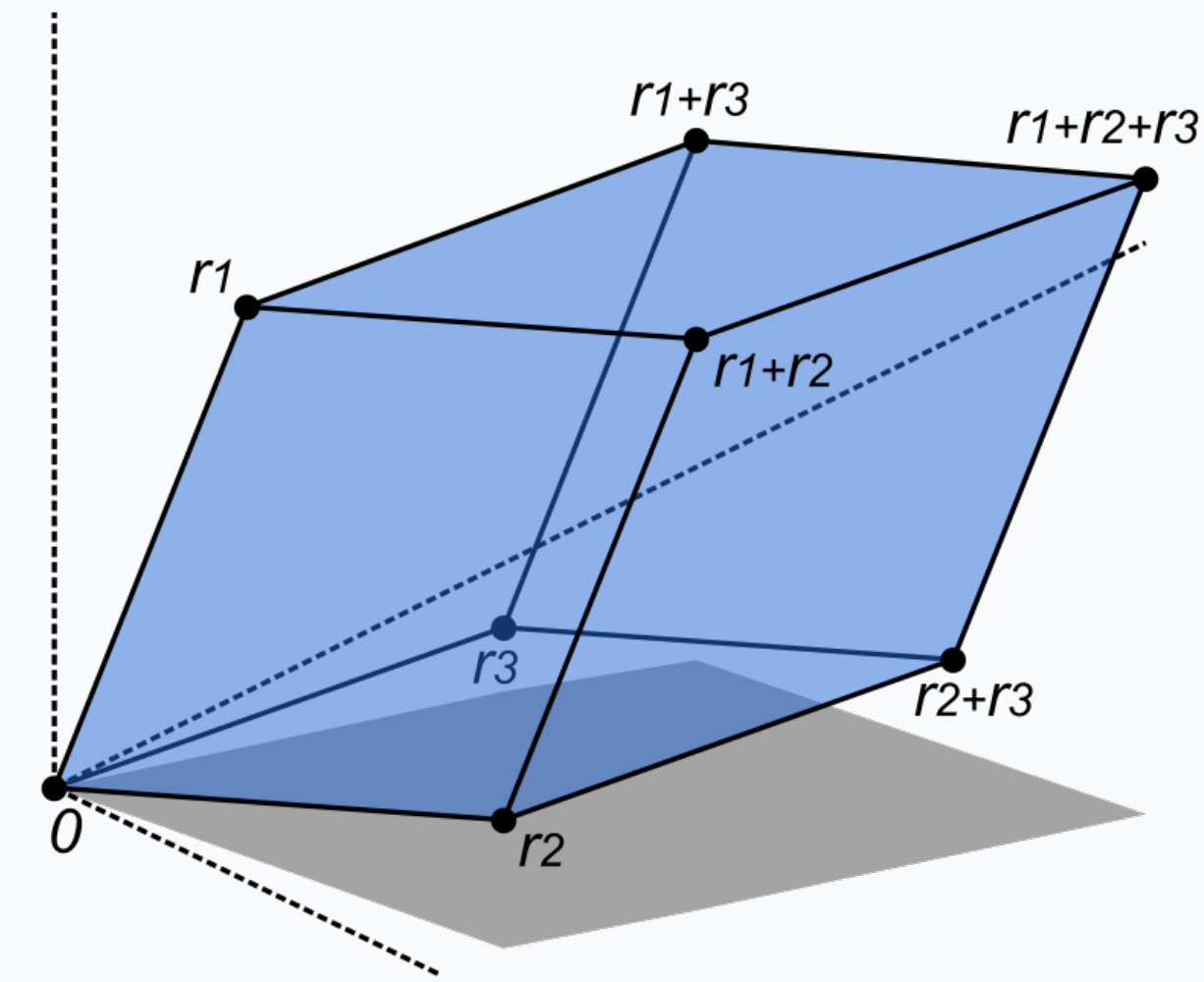
$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

- フロベニウス・ノルム (Frobenius norm)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

行列式

- 行列式はさまざまな意味を持つが
例えば、 r_1 、 r_2 、 r_3 の成す3次の
正方行列の行列式の値は、その
3つのベクトルから成る
平行6面体の体積を示す
- 行列式は、 $|A|$ または $\det(A)$ と書き表される

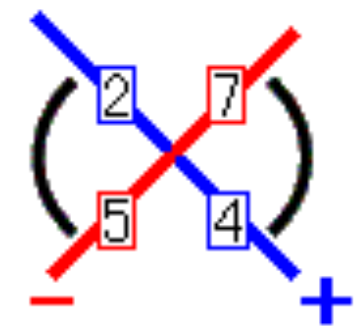


2次・3次の正方行列の行列式の求め方

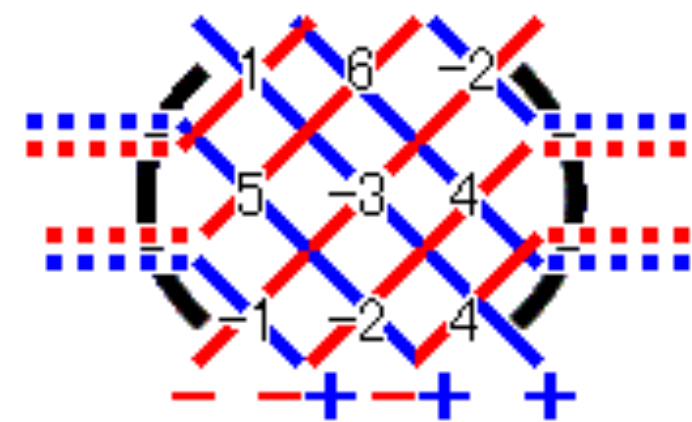
- 2次・3次については、サラスの方法で求めることができる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



$$\det A = 2 \times 4 - 7 \times 5 = -27$$



$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (-3) \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 \cdot (-2) \\ &\quad - 1 \cdot 4 \cdot (-2) - 6 \cdot 5 \cdot 4 - (-2) \cdot (-3) \cdot (-1) \\ &= -122 \end{aligned}$$

4 次以上の正方行列の行列式の求め方

- 余因子展開を行なう。余因子（cofactor）とは、i行とj列を抜いた小行列の行列式を求め、 $(-1)^{i+j}$ と掛け合わせたもの。余因子の和を求めると、全体の行列式になる。

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Aの行列式は、i行に関しては、以下のように求められる

$$\det(A) = \Delta_{i1}a_{i1} + \Delta_{i2}a_{i2} + \cdots + \Delta_{in}a_{in}$$

- Aの行列式は、j列に関しては、以下のように求められる

- $$\det(A) = \Delta_{1j}a_{1j} + \Delta_{2j}a_{2j} + \cdots + \Delta_{nj}a_{nj}$$

行列式の式の変形

- 単位行列の行列式は、1となる
- 行と行を入れ替えると、-1倍になる
- 列と列を入れ替えると、-1倍になる
- 1つの列の要素をc倍にすると、c倍になる
- ある行のn倍を別の行に加えても値は変わらない
- ある列のm倍を別の列に加えても値は変わらない
- 転置しても値は変わらない
- 2つの列が同一、2つの行が同一だと、0になる
- 1つの列の要素が2つの数の和になっているとき、2つの行列式の和という形で分解できる

逆行列

- n 次単位行列を I で表す。 n 次正方行列 A に対して、
$$AB = I = BA$$
を充たす n 次正方行列 B が存在するとき、これを A の逆行列と呼び、 A^{-1} と表す。
- クラメールの公式では、余因子から構成される行列（余因子行列：cofactor matrix と呼ばれる）の転置行列（随伴行列：adjugate matrix と呼ばれる）に A の行列式の逆数を掛けたもので求められる

$$C = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

ベクトルの外積と行列式

- ベクトルの外積（クロス積）は行列式で表わすことができる
- 2次元ベクトル（を3次元で表わす）の場合

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

- 3次元ベクトルの場合

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}$$

- n次元ベクトルの場合

- ▶ n-1個のn次元ベクトルの積を行列式で表わす。単位ベクトルを $\mathbf{e}_n$ とすると

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(n-1)1} & v_{(n-1)2} & \dots & v_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

この定義の場合、2次元ベクトルのクロス積は、1つのベクトルで、

$$\text{cross}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -v_2 \mathbf{e}_1 + v_1 \mathbf{e}_2 \quad \text{となる}$$

固有値と固有ベクトル

- 有限次元線形空間 V 上の線形変換 A に対して、次の方程式

$$Ax = \lambda x$$

を満たす零でないベクトル x とスカラー λ が存在するとき、 x を A の固有ベクトル、 λ を A の固有値と呼ぶ。

- 固有値は、行列式に関する次の方程式を解くことによって求められる。

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- 但し I は単位行列である。この方程式のことを固有方程式（または特性方程式）という。

正方行列とベクトルの積

- 通常、ベクトルは、列ベクトルの形で記述される。
- そのため、ベクトル $\mathbf{v}$ は、正方行列 M と積を取るときは、以下のように後ろから掛けられる。

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \mathbf{v}' = M\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- 多くのCGライブラリでは、ベクトル $\mathbf{u}$ は、行ベクトルの形で記述される。ベクトルの転置になっている。

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^T$$

- そのため、ベクトルは、正方行列との積を取るときは、以下のように前から掛けられる

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}, \mathbf{u}' = \mathbf{u}M = \begin{bmatrix} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

アフィン変換

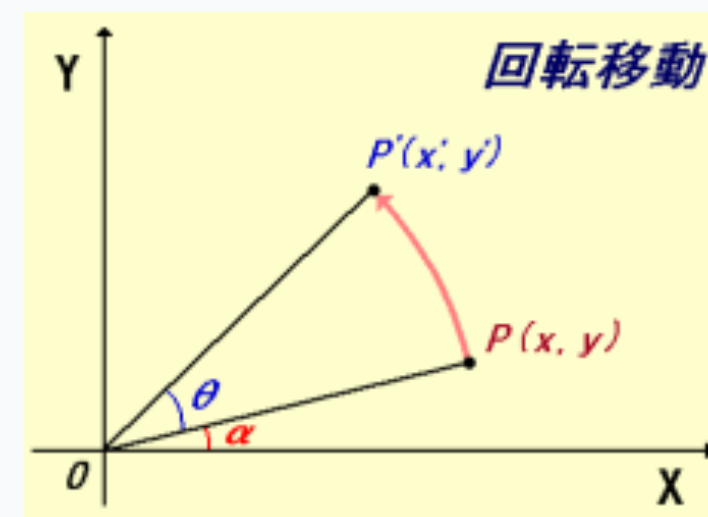
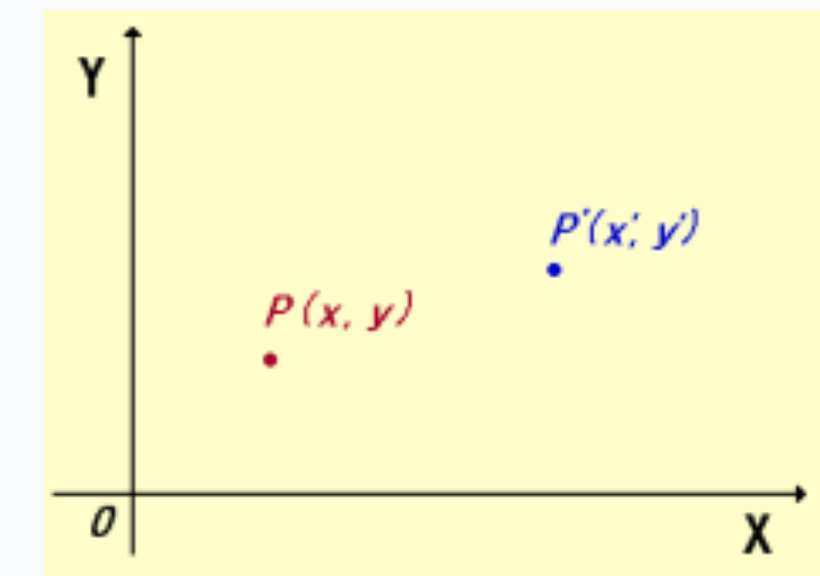
- 正方行列を使って座標上の移動や回転などを表わす
- 2次元の場合は、大きさ3の正方行列を用いる
- 3次元の場合は、大きさ4の正方行列を用いる
- 座標値を表わすのに、ベクトルの成分が1つ余分になるが、その部分には、1を入れる

Affine変換

- 移動
- 回転
- 拡大・縮小
- シアー（斜）
- 鏡像

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

移動変換

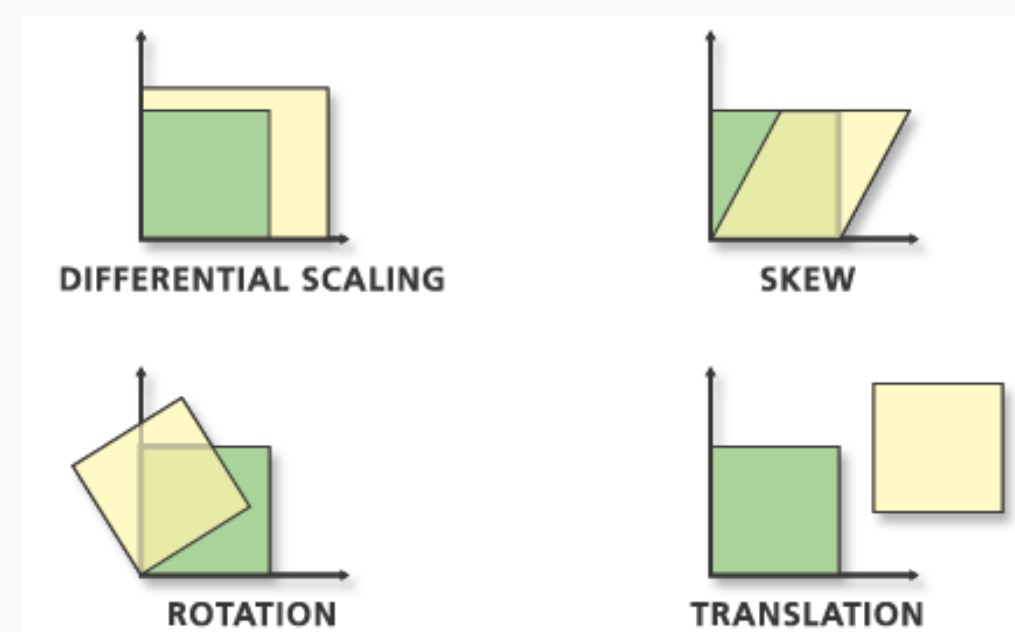


$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回転変換

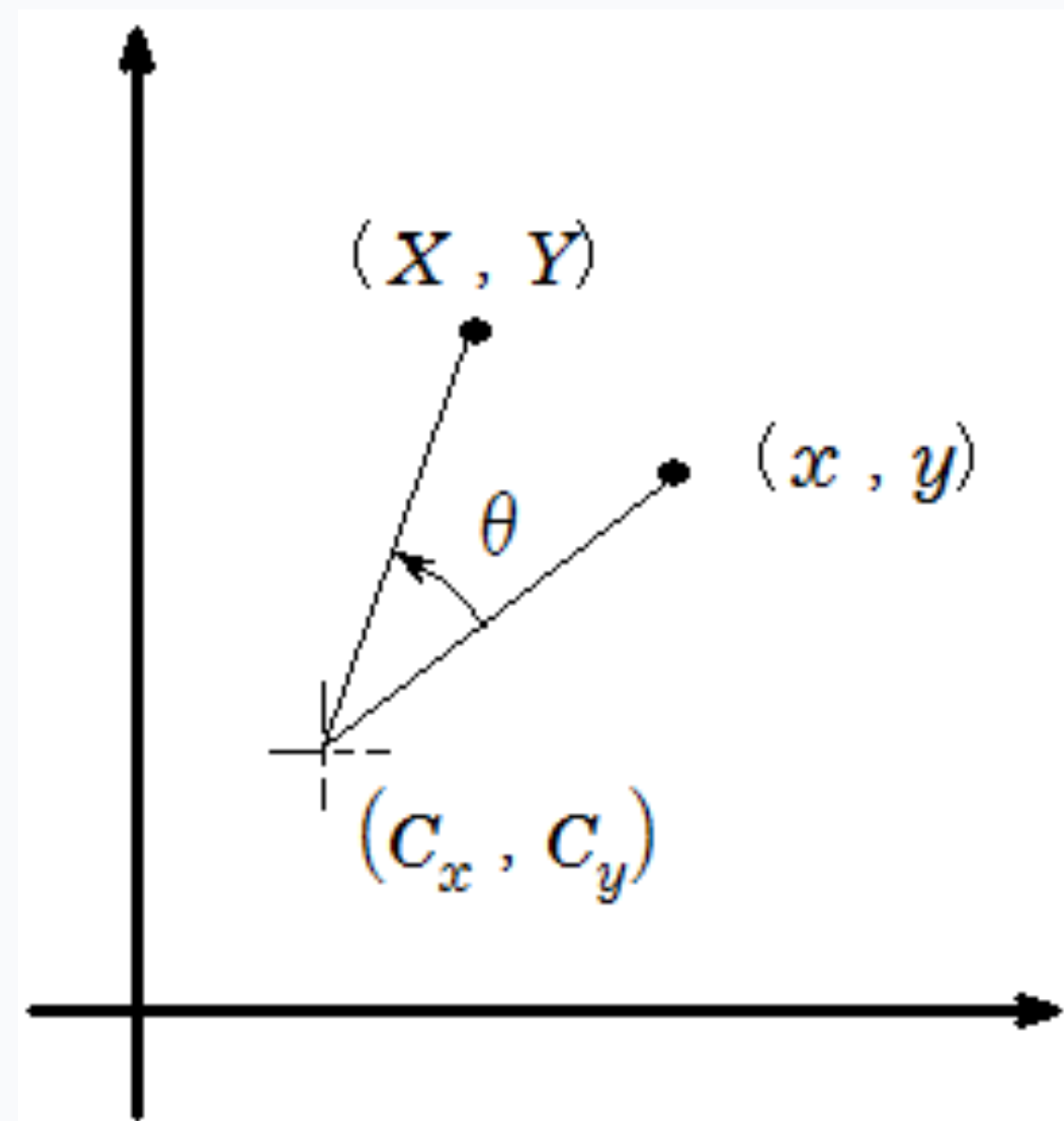
$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

拡大縮小・鏡像変換



Affine変換の組み合わせ

- 任意の点の周りの回転



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & C_x \\ 0 & 1 & C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{元へ戻す}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{原点周りの回転}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -C_x \\ 0 & 1 & -C_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{原点へ移動}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & C_x - C_x \cos\theta + C_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & C_y - C_x \sin\theta - C_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

<http://imaging-solution.blog107.fc2.com/blog-entry-111.html>

3次元のAffine変換

- 4次の正方行列で表現する

- 移動
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

拡大縮小・鏡像
$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 回転（z軸が奥行き方向とする）

x軸周り

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y軸周り

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z軸周り

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$