スクリプト言語プログラミング
Pythonによる数値解析

第２回講義資料

箕原辰夫

空白とコメント

- Pythonでは、左側に空白が空いているのがアウトラインのレベルを示す
  - TABキーを使う, Deleteで戻せる
- インデントがあっていないと動作しない

- # この後改行するまでがコメント
- """　"""　囲まれた範囲がコメント

Pythonの記号

記号	呼び方	意味
;	セミコロン	文の区切りを示す
.	ドット	所属を示す「〜の〜」
,	カンマ	羅列を示す「〜と〜」
" '	クォテーション	文字列を示す
#	ナンバーマーク	行の終わりまでコメント
"""	３つのクォート	囲まれた範囲がコメント
*	アスタリスク	「すべて」または「掛け算」または「字面展開」
:	コロン	制御構文であることを示す
@	アットマーク	アノテーション（実行時の指定）を示す

プログラムは式を記述していく

- 式の構成要素
  - 変数
  - 定数（リテラル）
  - 演算子

- 定数は、値のこと
  - 一定の値を取り続けるということで、定数(constant)と呼ばれる
  - プログラミング言語では、定数が型を持つ

値の型

- Java/C/C++/C#では、値の型が厳格に参照される。
  - 厳格な型言語（Strict type languages）
- Python/JavaScript/Rubyなどでは、結果的に値の型が決まっていく
  - 型推論（Type Inference）と呼ばれる
- 新しいプログラミング言語では、コンパイラを使う言語でも、実行時に型推論をするようになってきました
  - Rust/Dart/Swift/Julia/C#
- プログラム上で値を記述できる型（primitive type)には次のようなものがある
  - 論理型
  - 整数型
  - 実数型
  - 複素数型
  - 文字列型
- プログラム上で記述された値（型を持つ）をリテラル（literal）と呼ぶ

論理型

- 条件が満足されたかどうかを示す真偽値。
- **bool**型（ブール代数から）と呼ばれる。

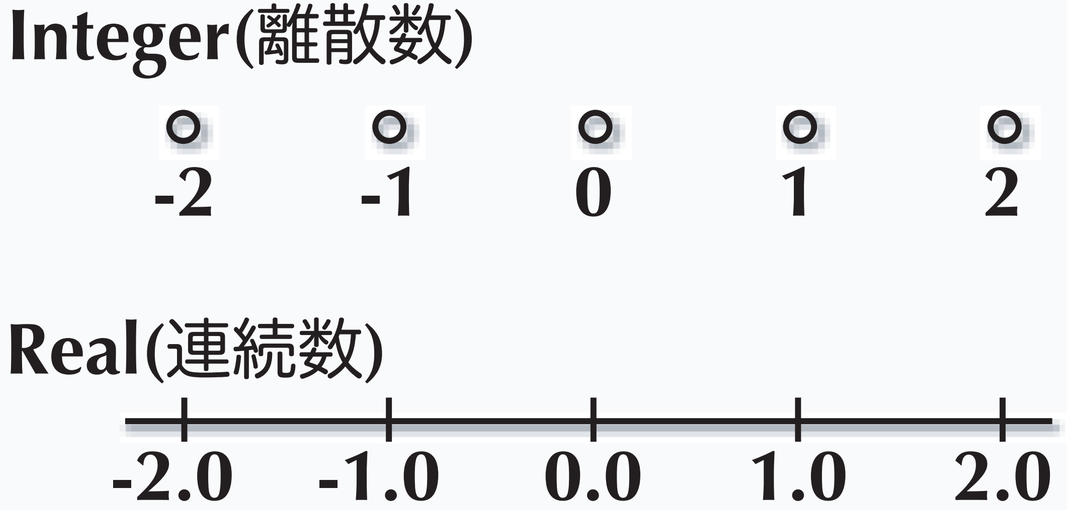
- 値としては、次の２つだけになっている。
  - **True**…条件を満足した（真）
  - **False**…条件を満足しない（偽）

特別な値

- **None** … オブジェクトを差していない特別な値
- クラスは、NoneTypeという型になっている

整数型と実数型

- 整数は、離散数（Discrete Number）と呼ばれ、実数は連続数（Linear Number）と呼ばれている。



整数型

- 整数型の型名は、int
- Pythonでは、整数の桁数の制限はない（C/C++/Java/C#などの他の言語では、42億ぐらいまでとか、922京ぐらいまでの制限がある）
- 整数の例：
  - 7　　2147483647 3
  - 79228162514264337593543950336
  - 100_000_000_000 (Python 3.6から)

8進数、2進数の整数と16進数の整数

- 8進数の整数
  - 0oを先頭につける(0から7までしか使えない)
  - 0o262730
- 16進数の整数
  - 0xを先頭につける
  - 0x45a
- ２進数の整数
  - 0bを先頭につける
  - 0b01010101

実数型

- 浮動小数点数で表現される
- Pythonでの型名としては、float
- 小数点をつけると自動的に実数型として認識される
  - 2.3　　4. → 4.0　　.05 → 0.05
- 指数表記が可能
  - 2.45×10^{16} → 2.45e16 あるいは 2.45e+16
- 実数の例：
  - 3.14　10.　.001　1e100　3.14e-10　0e0　3.14_15_93 (Python 3.6から)
- 表わせる範囲
  - $\pm2.23\times10^{-308}$ 〜 $\pm1.80\times10^{308}$

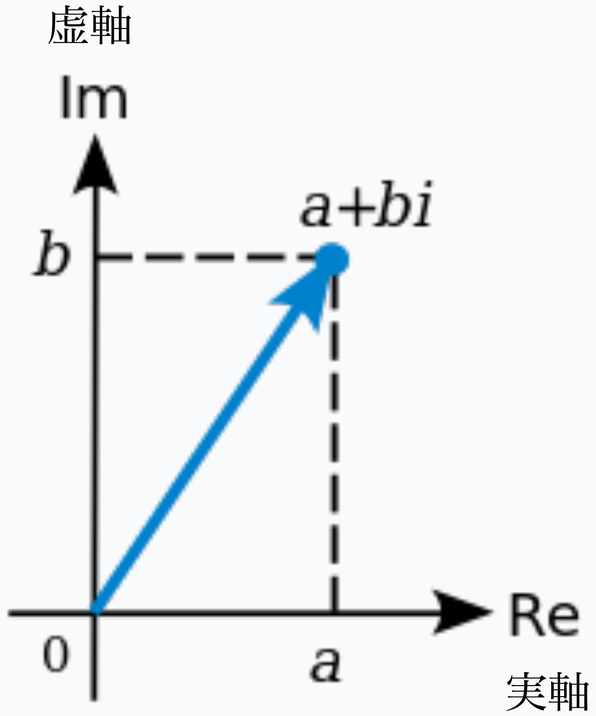
複素数型

- 虚数（数学ではiを使うが、工学系やPythonではjを用いる）

$$i \times i = -1 \qquad \sqrt{-1} = i$$

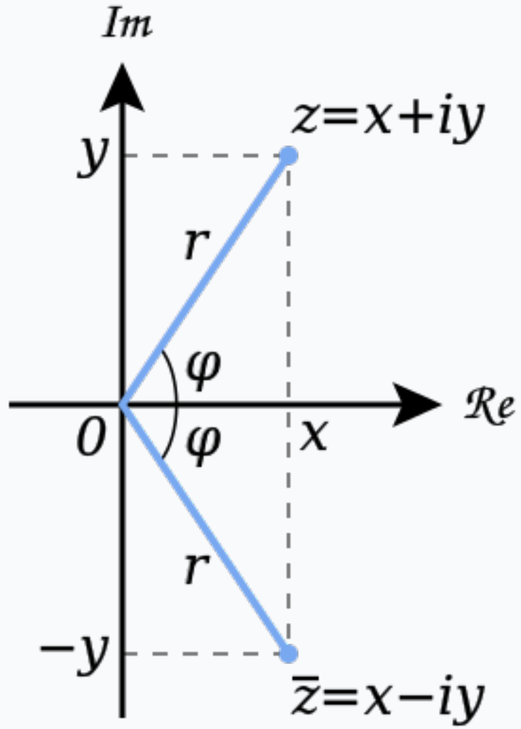
- 虚数値の例：
  - 1j　3.14j　10.j　10j　.001j　1e100j
  - 3.14e-10j　3.14_15_93j

- 実数部と虚数部を加減算することで
  複素数を表現することができる
- 型名は、complex
- 複素数の値の例：
  - 12+4j　3.5-5.2j　2+5j



複素数平面（Complex plane）

- 複素数平面は、ガウス平面（Gaussian plane）とも呼ばれる
- 共役複素数は、conjugateを使って求めることができる
  - 例：(1+1j).conjugate( )
- 実数部を取り出すのは、.real
  虚数部を取り出すのは、.imag
  を用いる
  - 例：(1+0.5j).real　(3+4j).imag



複素数とオブジェクト

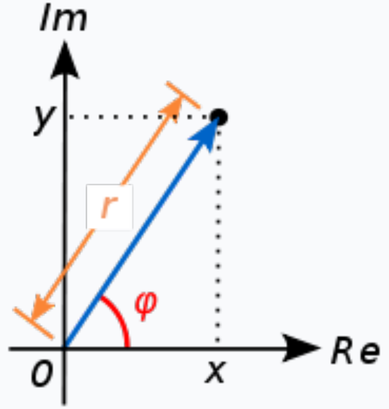
- 複素数はオブジェクトになっている（実は整数や実数もオブジェクト）
- オブジェクトは、そのオブジェクト固有の属性（attribute, フィールドfieldとも呼ぶ）を持っており、変数としてアクセスできる
- オブジェクトは、そのオブジェクト固有の関数（メソッドmethodと呼ばれる）を持っており、そのオブジェクトを介して呼び出すことができる
- 属性とメソッドを合わせて、プロパティ（property）と呼ぶことがある

Pythonでのオブジェクトのプロパティの標記法

- 属性の場合
  - オブジェクト.属性名
  - 例：(3+4j).real…3.0が返される
  - 例：(3+4j).imag…4.0が返される
- メソッドの場合
  - オブジェクト.メソッド名(パラメータ)
  - パラメータが必要ないときは括弧内には何も書かない
  - 例：(3+4j).conjugate( )…3-4jが返される

複素数のためのライブラリ

- abs(複素数)…複素数のノルム（normあるいは絶対値、大きさrのこと）を求める
- **import** cmathを入力しておく
- cmath.phase(複素数)…偏角φをラジアン角度で返す
- cmath.polar(複素数)…ノルムと偏角の対を返す
- cmath.rect(ノルム, 偏角)…ノルムと偏角から構成される複素数を返す
- ノルムと偏角で表される複素数の形式を「極形式」(polar form)と呼ぶ
- 極形式については、オイラーの公式が有名



$$z = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = re^{j\varphi}$$

文字列型

- 文字はすべてUnicodeで符号化されている。
- ファイルなどを読み込むときに、別の符号（JISやShift JIS）を用いるときは、符号（エンコーディング：encoding）の指定をしなければならない。

- 文字列を扱う型はstrクラスになっている
- Pythonでは、どちらかの引用符を用いる
  - 値を記述するときは一重引用符で囲む 'a'
  - 値を記述するときは二重引用符で囲む "a"

Unicodeによる文字列

- strクラスという形で定義されている
- \nは改行、\tは水平タブ
- \" はダブルクォーテーション、\'はシングル
- \\ はバックスラッシュ自身を表わす
- \uと16進数4桁で、Unicodeの文字を指定できる。
  - "\u4e00" → "一"
- \Uと16進数8桁で、拡張された文字領域の文字を指定できる。
  - "\U00013000" → "  "
- パレットでUnicodeのコード表を参照
  - Mac OS スクリプトメニューの「絵文字と記号を表示」→左上のリストをカスタマイズで、「Unicode」を追加
  - Windows IMEパッドの文字カテゴリでUnicodeを選ぶ（基本多言語面は、4桁で指定する部分、追加多言語面は、8桁で指定する部分）

Unicodeと組込み関数

- 1文字に対して
  - ord(1文字の文字列)…文字に対応するUnicodeのコードを整数として返してくれる
    - 例：ord("🙇")→77848　　ord("A")→65　　ord("漢")→28450
  - chr(整数)…Unicodeの整数に対応する1文字の文字列を返してくれる
    - 例：chr(105)→'i'　　chr(0x3fe9)→'𰻩'　　chr(0x103b5)→'𐎵'
- 文字列に対して
  - ascii(文字列)…ascii文字はそのまま、それ以外の文字については、文字列中の各文字に対して対応するUnicodeの16進数を「文字列リテラル」として返してくれる。もちろん、 1文字の文字列でも使用可能
    - 例：ascii("ABCあい🙇")→'ABC\\u3042\\u3044\\U00013018'
    - 例：ascii("鮪") → '\\u9baa'　　ascii("🧘") → '\\U00013009'

変数の名前と代入

- 変数の名前
  - 変数の名前に使えるのは、半角の英数字、およびアンダーバー（ _ ）
  - 名前の先頭の文字は英字でなければならない
  - 変数名は、半角の小文字の英字でつけるように心掛けたい
  - _で始まる変数は、内部用の変数。__（アンダーバー2つ）で始まる変数は、システム変数

    例：

    x y z one two $na99$ $take\_a\_cup$
- 代入
  - 変数名 = 式

    例：　　$x = 10$

プログラム上に現れる英字

- a … 変数名
- "a" あるいは 'a' … a一文字から成る文字列

- abc1234 … 変数名
- "abc1234" あるいは 'abc1234' … 文字列

- 以下は予約語なので、変数名としては使えない
- and as assert async await break class continue
- def del elif else except finally for from
- global if is import in lambda nonlocal not
- or pass raise return try yield while with

変数の型宣言

- 変数の型を予め宣言しておくことができる（Python 3.7より）
- 変数の型宣言は、代入より前か、初期値を代入するときに行なう
- 書式
  - 変数名 : 型名
  - 変数名：型名 = 初期値の式
- 例：
  - x : str
  - y : float
  - z : complex = 4j
  - i : int = 7

変数の参照

- 参照
  - 変数が保持する値に置き換えられる。
  - 変数が保持するオブジェクトが参照される。
  - 例：

```
x = 8
print( x * 12 )　# 8 * 12に置き換えられる
```

- 自己参照代入
  - 元の値を利用して、新しい値が代入される。

$x = x + 1$

$x = -x$

$x = x - 20$

代入としての記号 =

- 右辺と左辺は同一ではない
- 等しいという意味ではなく、右辺の式（expression）を評価（evaluate）して左辺にAssignするもの。

左辺 = 右辺

  - この意味は、「左辺の変数　←　右辺の評価値」

- なお、左辺の値が評価値として残る（右結合性）

$$x = y = z = 0 \quad \rightarrow \quad (x := (y := (z := 0)))$$

式に何が書けるか

- 式の定義
  - 定数
  - 変数名
  - 式 + 式　←加算　add
  - 式 – 式　←減算　subtract
  - 式 * 式　←乗算　multiply
  - 式 / 式　←実数除算 true divide
  - 式 // 式　←整数除算 floor divide
  - 式 % 式　←剰余　modulo
  - 式 ** 式　←べき乗 power
  - 変数名 := 式　←代入式 assign expression
  - (式)

式の構文解析

- ４５＊（３４＋２３）／（ｙ－５）
- 式＊（式　＋　式）／（式–式）
- 式＊（式）　／　（式）
- 式＊式　／　式
- 式　／　式
- 式

- ×　45x + 65y

- 構文解析器（parser：パーサー）は、文法規則（syntax rule）に従って式を解釈し、置き換えていく

代入演算子 :=

- Python 3.8からの導入で、式の中に演算子として代入演算子を指定することができる
- = は、代入文を形成するので、左辺に代入する変数、右辺に式を記述するが、:=は式の中に代入式を記述することができる
- 例：

  print(n := 10, f"binary value of {n} is {n:b}") → binary value of 10 is 1010
- :=は、優先度が低いので、場合によっては、()をつけて優先度を高くする必要がある
- また、関数呼出しの実引数の部分以外では「(変数名 := 式)」という形で、丸括弧をつけてあげないと文法エラーになる
- 例：

  t = (n := 12, m := 13)　　→ t = (12, 13); n =12; m=13

式と評価

- 評価（Evaluation）とは
  - 単一の値になるまで計算すること
- 式の書式に合っているか
  - 書式に合っていないと文法エラー
- 式の評価の優先順位
  - 優先順位がある
  - 単項の±は一番優先される
  - べき乗の演算子（**）の優先度は高い
  - 乗除算の演算子（* / // %)の方が優先される
  - 加減算の演算子（+ -)が優先度低い
  - 代入演算子:= は優先度が一番低い
  - （）で囲むと優先度を高くする

結合性

- 同じ優先順位の演算子は、左から評価されていく（加減乗除などの場合）
  - 左結合性（Left associative）と呼ぶ

56 * 34 / 28 * 60 / 30 % 89

→((((56 * 34) / 28) * 60) / 30) % 89

83 + 45 - 23 + 38

→((83 + 45) - 23) + 3

整数演算

- 整数除算は、小数点以下が切り捨てられる
  - 5 // 2 → 2
  - 1 // 8 → 0　分母の方が大きいと0になる
- どこに整数除算があるか重要
  - 5 // 2 * 2 → 4
  - 5 * 2 // 2 → 5
- 剰余算は、余りを計算する（実数でも可）
  - 365 % 20 → 5
  - x % n → 0 〜 n-1の数しか出てこない

    計算結果が0になるときは、割り切れるということ

整数剰余・整数除算

- x // n * n
  - xと等しいか、xを超えない最大の数で、nで割り切れる数が求まる
  - 例： 10 // 3 * 3 → 9

- n // m
  - n < mの場合は、0になる
  - 例： 3 // 4 → 0

- n % m
  - n < mの場合は、nになる
  - 例：3%4 → 3

整数除算の計算方法

- x % n → x – (x // n * n)
- x // n → (x – x % n) // n

- x // n * n ≠ xのときがある
  - 9 // 3 * 3 → 9
  - 10 // 3 * 3 → 9
  - 11 // 3 * 3 → 9
  - 12 // 3 * 3 → 12
  - 13 // 3 * 3 → 12
  - 14 // 3 * 3 → 12
  - 15 // 3 * 3 → 15

基数と整数剰余・整数除算

- 各桁に分解できる
  - 3456 % 10 = 6　　最下位の一桁
  - 3456 // 10 % 10 = 5
  - 3456 // 10 // 10 % 10 = 4
  - 3456 // 10 // 10 // 10 % 10 = 3
- n進数でも同じ
  - 234 % 7 = 3
  - 234 // 7 % 7 = 5
  - 234 // 7 // 7 % 7 = 4

負の数を伴う整数除算・剰余

- どちらかに（あるいは両方）負の数がはいる場合は、もともと整数除算は、床関数（floor関数：⌊x⌋…xと等しいか、xよりも小さいなかでの最大の整数）で計算されるので、マイナス方向に引っ張られた値になる。
- 例：
  - 10 // -3 ⇒ 10/-3 = -3.333..., floor(-3.3...) = -4
  - -10 // -3 ⇒ -10/-3 = 3.333..., floor(3.3...) = 3
  - -10 // 4 ⇒ -10/4 = -2.5, floor(-2.5) = -3

- 負の値が入った場合の剰余の計算方法は、除数で整数除算を行なった結果と除数を乗算して、被除数からの差分が計算される
  - m % -n ⇒ m - (m // -n) * -n
  - -m % n ⇒ -m - (-m // n) * n
  - -m % -n ⇒ -m - (-m // -n) * -n
- 例：
  - 12 % -7 ⇒ 12 // -7 = -2, 12 - (- 2 * -7) = 12 - 14 = -2
  - -4 % 12 ⇒ -4 // 12 = -1, -4 - (-1 * 12) = -4 + 12 = 8
  - -8 % -5 ⇒ -8 // -5 = 1, -8 - (1 * -5) = -8 + 5 = -3

- 参考：

  https://stackoverflow.com/questions/3883004/the-modulo-operation-on-negative-numbers-in-python

整数におけるビット演算子とシフト演算子

- ~　ビットの反転（単項演算子）
  - 例：~x
- &　ビットのAND（二項演算子）
  - 例：　x & 7
- |　ビットのOR（二項演算子）
  - 例：　 x | 5
- ^　ビットの排他的論理和（二項演算子）
  - 例：x ^ 0b1101
- シフト算は２のべき乗とのかけ算・割り算になる
- >> 右シフト　２のべき乗で割った
  - 例：　12 >> 3　≡　12 // (2*2*2)
- << 左シフト　２のべき乗と掛けた
  - 例：　3 << 4　≡　3 * (2 * 2 * 2 * 2)

ビット演算の例（8bit演算で）

- 0xa3と ~0xa3
  - 0b10100011 各ビットを反転する(Pythonでは-(n+1))
  - 
  - 0b01011100
- 0xa3 & 0x7a
  - 0b10100011 0xa3
  - 0b01111010 0x7a
  - 0b00100010 0x22 両方とも1のビットだけ1
- 0xa3 | 0x7a
  - 0b10100011 0xa3
  - 0b01111010 0x7a
  - 0b11111011 0xfb いずれかのビットが1なら1
- 0xa3 ^ 0x7a
  - 0b10100011 0xa3
  - 0b01111010 0x7a
  - 0b11011001 0xd9 どちらかのビットが1なら1

2進数への変換と表示

- 入力された２つの数をそれぞれ２進数で表示する
- 入力された文字列の２進数を整数に変換するには、int(文字列, base=2)を用いる
- 整数を２進数で表示するには、bin( )関数を用いる
- format関数を使って数値を文字列に変換する
  - format(数値, 書式文字列)
  - "b"…２進数　　"d"…１０進数　　"o"…８進数　　"x"…16進数
- 文字列のzfill関数
  - 文字列.zfill(0で埋める桁数)
  - 使用例の書式：format(式, "b").zfill(桁数)
    - 式の値を、桁数分の0で埋めてから、２進数を表示する
- 表示する数の下位の有効桁数を指定したいときは、「値 & 0b1111」などを使う
  - 例：format(~(0b101) & 0xff, "b").zfill(8)
    - 下位８桁だけを表示する

整数の補数

- 足してその数になる数の組み合わせ
- １０の補数
  - 足して１０になる数の組み合わせ
  - 例： 1と9, 2と8, 3と7, 4と6, 5と5　　6に対する10の補数は？　　… 4
- 9の補数　0と9, 1と8, 2と7, 3と6, 4と5　　8に対する9の補数は？　　… 1
- 補数は引き算の替わりに用いられる
  - 基数の補数（2の補数、10の補数）と基数-1の補数（１の補数、9の補数）を利用
  - 基数の補数 = 基数-1の補数　＋ 1
  - 例： 10000 – 5678 = ？
  - 9999
– 5678 ＋1 = 4321 + 1 = 4322
  - 15678 – 9876 = 5678 + 10000 – 9876 = 5678 + 9999 – 9876 + 1 = 5678 + 123 + 1 = 5802

指数演算則

- 数学上の表現

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-N} = \frac{1}{a^N}$$

$$a^{M+N} = a^M \times a^N$$

$$a^{M-N} = a^M \div a^N$$

$$a^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{a}$$

$$a^{\frac{M}{N}} = \sqrt[N]{a^M}$$

$$a^{MN} = (a^M)^N$$

- Python上の表現

a ** 0

a ** 1

a ** -N

a ** (M+N)

a ** (M-N)

a ** (1/N)

a ** (M/N)

a ** (M * N)

複素数の四則演算

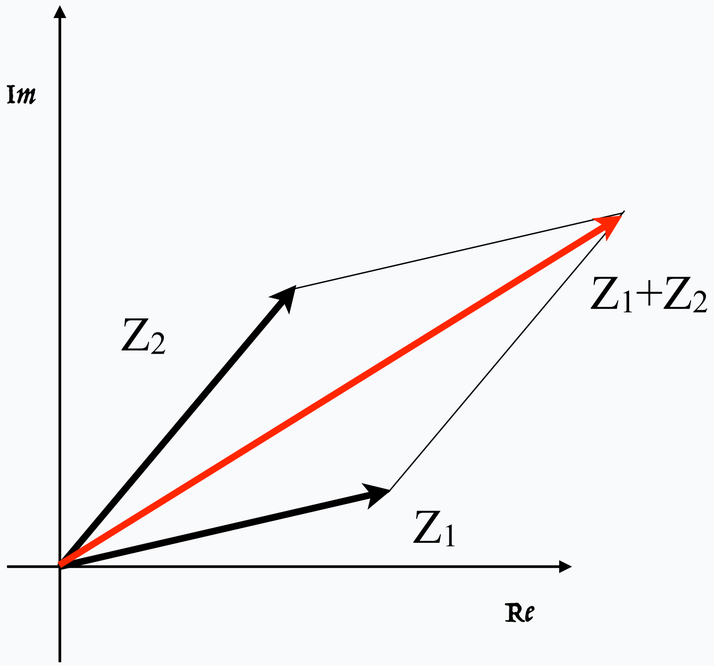
- $(x_1 + y_1 j) + (x_2 + y_2 j) \Rightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)j$
- $(x_1 + y_1 j) - (x_2 + y_2 j) \Rightarrow (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)j$
- $(x_1 + y_1 j) * (x_2 + y_2 j)$
  $\Rightarrow (x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + (x_2 * y_1 + x_1 * y_2)j$

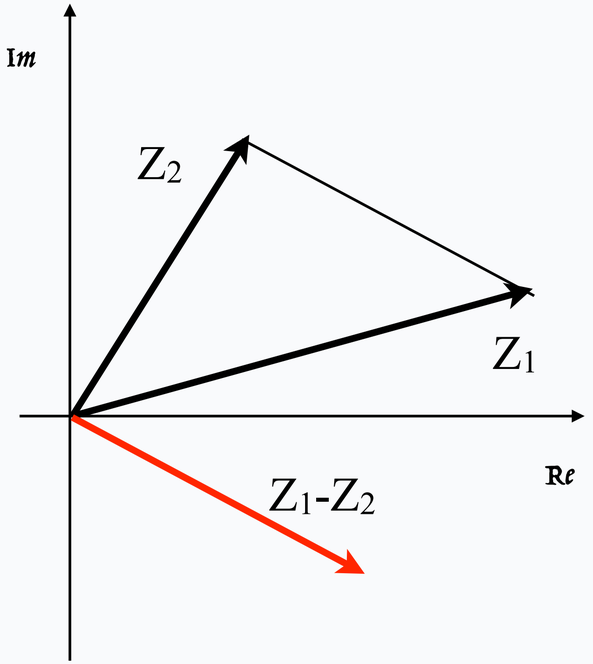
$$\frac{x_1 + y_1 j}{x_2 + y_2 j} \Rightarrow \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} j$$

- $z^n * z^m = z^{n+m}$
- $(z^n)^m = z^{nm}$
- $(z * w)^n = z^n * w^n$

複素数の加算・減算の意味

- 複素数の加算は、ガウス平面上では、２つのベクトルの加算として表される
- 複素数の減算は、ガウス平面上では、２つのベクトルの減算として表される





複素数の乗算・除算の意味

- 実数と複素数を乗算するのは、ノルムの拡縮
- 虚数jと複素数を掛けるのは、原点周りの90度の回転変換

- 一般に、複素数と複素数の乗算は、ノルムの積と偏角の和の組み合わせになる
- 複素数と複素数の除算は、ノルムの商と偏角の差の組み合わせになる

$$z = re^{i\alpha}$$
$$w = se^{i\beta}$$

$$zw = rse^{i(\alpha+\beta)}$$
$$|zw| = |z||w|$$
$$\arg zw = \arg z + \arg w$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
$$\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

複素数の乗除算については

- デジタル・ビーイング・キッズ：画像処理の基礎講座
  - http://www.dbkids.co.jp/popimaging/seminar/complex/complexoperation.htm
- フーリエ級数まで解説されている

複素数のべき乗（実数）の意味

- 複素数の表現について、オイラーの公式を思い出そう

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- nが整数で、θが実数のときに、ド・モアブルの定理(De Moivre's Law)が成り立つ

$$\left(e^{j\theta}\right)^n = \left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

- 極形式で偏角の角度のn倍に回転する（反時計周りに）ということを示す
- 一般の複素数の場合には、ノルムのrが付くので、r^nの項が上記の値に乗算されるので、nが大きくなるにつれ、$r > 1$のときは原点から離れる螺旋状の形、$r < 1$のときは原点に近づく螺旋状の形、$r = 1$のときは、円になる（ただし$\theta \neq 2m\pi$のとき）

複素数のべき乗をプロットしてみた例

- べき乗の場合、乗数を増やすと非常に大きくなるので、長さ（ノルム）を1.02にして、べき乗を1から0.2ずつ増やしてみた
- プログラム例：

```
from matplotlib import pyplot


value = (1+1j)*(1/2**0.5)*1.02
rlist, imlist = [], []
for n in range( 400 ):
    p = 1 + 0.2 * n
    rlist.append( (value**p).real )
    imlist.append( (value**p).imag )
    print( value**p )
pyplot.plot( rlist, imlist )
pyplot.show()
```