

集合と命題

集合に関する性質の証明には命題を使います. ここでは集合に関する性質を命題に言い換える方法を学びます.

必要条件, 十分条件, 同値

一般に, 条件 C が成り立つならば条件 D が成り立つことを $C \implies D$ とかきます. $C \implies D$ のとき, C は D の**十分条件**といい, D は C の**必要条件**といいます.

たとえば, 「人間である」 \implies 「動物である」 ですから, 「人間である」は「動物である」ための十分条件, そして, 「動物である」は「人間である」ための必要条件です.

$C \implies D$ かつ $D \implies C$ が成り立つとき, C と D は同値であるといい, $C \iff D$ と書きます.

たとえば, 「配偶者あり」という条件は「結婚している」という条件と同値です:
「配偶者あり」 \iff 「結婚している」.

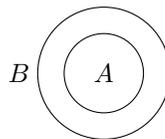
問題 1 (常識を前提にして) 同値な命題はどれとどれでしょう?

1. 太郎は花子より背が高い.
2. 太郎は花子が好きだ.
3. 花子は太郎より背が低い.
4. 花子は太郎に好かれている.

解 $1 \iff 3.$ $2 \iff 4.$

部分集合

部分集合: A と B を二つの集合とします. B が A のすべての要素を含むとき, A は B の部分集合であるといい, $A \subseteq B$ と書きます. 集合を円盤として表せば, 円盤 A が円盤 B の内部の収まっている状況を表しています. $A \subseteq B$ である必要十分条件は 任意の x について, $x \in A$ が成り立っているならば $x \in B$ が成り立っていることです: $x \in A \implies x \in B$.



なお、この定義でもわかるように、 A と B が一致するときも A は B の部分集合といえます:

$$A = B \implies A \subseteq B.$$

例をあげます. すべての人間からなる集合を A とします. そして、動物の全体集合を B とします. すべての人間は動物ですから、 $A \subseteq B$ です.

集合の相等: 二つ集合 A と B が等しいための必要十分条件は A が B の部分集合であり、かつ B が A の部分集合であることです. すなわち、

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

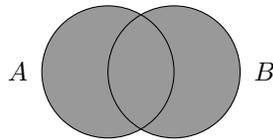
これを、**外延性(extensionality)**の公理と呼びます. 集合はその要素で決まることを述べています. 集合の大事な性質です.

例 1 $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

集合の和, 共通部分, 差

以下の4図で左右の円で表される集合をそれぞれ A , B とします.

和集合: A と B を集合とします. A と B を合併した集合のことを A と B の和集合とよび、 $A \cup B$ と書きます.

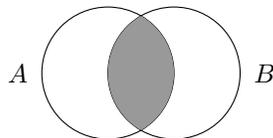


$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B.$$

たとえば、太郎の男の友達の集合を A , 太郎の女の友達の集合を B とおきます. すると、太郎の友達の集合 C は A と B の和集合です: $C = A \cup B$.

また、 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{u, v, w\}$ ならば $A \cup B = \{a, b, c, u, v, w\}$ です.

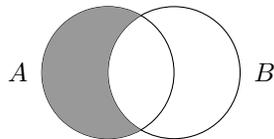
共通部分集合: A と B を集合とします. A と B の共通の要素全体からなる集合のことを A と B の共通部分集合と、 $A \cap B$ と書きます.



$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B.$$

たとえば, 太郎の友達全体の集合を A , 女性の全体を B とします. そのとき, 太郎の女友達の全体集合 C は A と B の共通部分集合です. このことを $C = A \cap B$ と書けます.

差集合: A と B を集合とします. A から B の要素を取り除いた集合を A から B の差集合とよび, $A \setminus B$ と書きます.



$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

たとえば, 太郎の友達全体の集合を A , 日本人の全体集合を B とします. そのとき, $A \setminus B$ は, 太郎の外国人の友達の全体集合を表します.

問題 2 このとき, $A \setminus B = \emptyset$ は日本語に訳して下さい.

解 太郎には外国人の友達がいない.