

1 一階述語論理の完全性

「トートロジーは証明可能である。」これが、一階述語論理の完全性定理とよばれる有名な定理です。ゲーデルによって証明されたので、ゲーデルの完全性定理ともよばれています。本節では、この定理をきちんと証明します。証明は、文献 [1, 2] を参考にしました。とくに [1] を補う形をとります。

一階述語論理の体系としては、自然演繹NKを用います。シーケント計算LKでも、あるいはヒルベルト流Hqでも、証明はほとんど同じです。

以下、自由変数のない論理式(閉論理式)を文といいます。論理式 A が仮定の集合 Γ からNKの中で証明できることを $\Gamma \vdash A$ と書きます。つまり、 A を結論とし、(dischargeされていない)仮定の集まりを Γ であるようなNKの証明図が存在することを表す記号として使います。

1.1 モデル

一階述語論理のモデルの概念はすでに定義しました。ひとつのモデルは、すべての文をふたつのグループ $\mathcal{T}$ と $\mathcal{F}$ に重複なく分けたことを思い出しましょう: $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} = \text{文の全体集合}$. その分割は、次の条件を満たす分割でした。(ただし条件4はそのままでは成立ちません.)

1. $\top \in \mathcal{T}$ ($\top$ は真)
2. $\perp \in \mathcal{F}$ ($\perp$ は偽)
3. A と B が文ならば, $A \wedge B \in \mathcal{T} \iff A \in \mathcal{T} \text{ かつ } B \in \mathcal{T}$ ($\iff$ は両辺が同値であることを意味するメタな略記法. $\equiv$ とは違いますので注意)
4. $\exists x A(x) \in \mathcal{T} \iff$ ある項 t が存在して $A(t) \in \mathcal{T}$
5. A が文ならば, $A \in \mathcal{T} \cup \mathcal{F}$.
6. A と $\neg A$ は同じグループ($\mathcal{T}, \mathcal{F}$)には属さない.

NKにおいては, $\forall x$ は $\neg \exists x \neg$ の, $A \rightarrow B$ は $(\neg A) \vee B$ の, $A \vee B$ は $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ の, それぞれ略記法とみなせることはすでにみました。したがって、一般性を失うこと

なく、論理記号は $\wedge, \neg, \forall, \perp, \top$ のみと仮定します。また、簡単のため、定数記号は少なくともひとつはあるとします。なお簡単のため関数記号はないものとします。関数記号がある場合についての注意を、最後に付け加えます。

モデルの概念と文の全体集合の2分割とは、次の意味で等価です。モデル M が与えられれば、 M により充足される文の全体を $\mathcal{T}$ 、充足されない文の全体を $\mathcal{F}$ とおけば、上の条件を満たす2分割が得られます。逆に、上の条件を満たす2分割が与えられれば、モデルの領域 U として変数を含まない項の全体、述語記号 R の解釈は $R(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$ のときおよびそのときに限りなりたつような、 U 上の n -項関係として定義します。つまり R は U^n の部分集合として解釈される。するとこの領域と解釈は $\mathcal{T}$ のすべての文を充足し、かつ、 $\mathcal{F}$ の文をどれも充足しないことが容易に証明できます。以上まとめると、モデルとは、ある論理的な制約を充たすような文の集合の2分割であることがわかりました。あとで、無矛盾な文の集合に対してモデルを構成しますが、そのとき、上の条件4を含めたすべての条件を満たす分割を作ること目標となります。

1.2 Lindenbaumの定理

定義 1.1 (full) どんな文 A についても $\Gamma \vdash A$ または $\Gamma \vdash \neg A$ が成り立つとき、 Γ は充満(full)であるいいます。

定理 1.1 A を文、 Γ を無矛盾とする。そのとき $\Gamma \nvdash \neg A$ ならば $\Gamma \cup \{A\}$ は無矛盾である。

証明 A を文、 Γ を無矛盾、 $\Gamma \nvdash \neg A$ と 仮定する。背理法で証明しよう。すなわち、 $\Gamma \cup \{A\}$ が矛盾であると仮定します。すると、矛盾の定義により、仮定の集合が $\Gamma \cup \{A\}$ の部分集合であるような、結論 $\perp$ の証明図が存在します。 A は、この証明図の仮定に現われなくてはなりません。さもないと、 Γ の論理式だけを仮定して、矛盾が導けてしまい、 Γ は無矛盾という仮定に反するからです。ゆえに、 $\neg$ の導入規則により、 A をdischargeします。これは、 Γ のある部分集合を仮定の集合とする、 $\neg A$ の証明図が得られたこと になります。これは、仮定 $\Gamma \nvdash \neg A$ に反します。ゆえに、 $\Gamma \cup \{A\}$ は無矛盾です。□

系 1.2 A を文、 Γ を無矛盾とする。そのとき $\Gamma \cup \{A\}$ が矛盾ならば、 $\Gamma \vdash \neg A$ である。

証明 定理 1.1の対偶です.

□

すべての文の集合は可算です. つまり, $1, 2, 3, \dots$ とすべての文を数えることができます. このことは, 可算な記号から作られる有限列の全体は可算であることの帰結です.

定理 1.3 (Lindenbaumの補題) Γ が無矛盾な文集合ならば Γ のfullな拡大が存在する.

証明 すべての論理式を一行に並べます: $A_1, A_2, \dots$. Γ からはじめて次のような列を帰納的に定義します.

$$\begin{aligned}\Gamma^0 &= \Gamma \\ \Gamma^{n+1} &= \begin{cases} \Gamma^n \cup \{A_n\} & (\Gamma^n \not\vdash \neg A_n \text{ のとき}) \\ \Gamma^n & (\Gamma^n \vdash \neg A_n \text{ のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

すると, 各 Γ^n は無矛盾です. これは, n に関する帰納法のステップに 定理 1.1を使うことによりただちに証明できます. さらに, $\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$ も無矛盾です. なぜなら, Γ^* からの仮定を使って $\perp$ が証明できたとすると, ひとつの証明に使われている仮定は有限個ですから, その使われたすべての仮定は, ある Γ^k に含まれていなければなりません. これは, しかし Γ^k が無矛盾であることに反します. ゆえに, Γ^* は無矛盾でなければなりません. Γ^* がfullであることを示すため, A を任意の文としてみましょう. $A = A_n$ とします. $\Gamma^* \not\vdash A$ と仮定します. すると, もちろん $\Gamma^{n+1} \not\vdash A_n$ です. ゆえに, Γ^{n+1} の定義により, $\Gamma^n \vdash \neg A$ でなければなりません. ゆえに, $\Gamma^* \vdash \neg A$ です. すなわち, $\Gamma^* \vdash A$ または $\Gamma^* \vdash \neg A$ であることが示されました. A は任意の文でしたから, これで Γ^* がfullであることが示されました. □

1.3 Henkinの定理

定理 1.4 (Henkinの定理) Γ を文の集合とする. このとき, 次は同値である.

1. Γ が無矛盾である.
2. Γ のモデルが存在する.

証明 (2) $\implies$ (1) (健全性, Soundness). まず, NKは真なる命題からは真なる命題のみを導出することを証明します. すなわち, M を任意のモデル(=解釈=数学的構造)として, 「 $\Gamma \vdash A$ のとき, $M \models \Gamma$ ならば $M \models A$ である」ことを示します. そのためには, 各推論規則について, M が前提の論理式をすべて満たせば結論も満たしていることを確かめます. つまり, 推論規則が真偽値の真を保存することことを示せばよい. 詳細は演習とします.

これを使うと, もし $\Gamma \vdash \perp$ で, かつ $M \models \Gamma$ とすると, $M \models \perp$ が得られます. これは $\perp$ の解釈の定義に矛盾します. ゆえに $\Gamma \not\vdash \perp$, すなわち Γ は無矛盾です.

「(1) $\implies$ (2)」 証明は次の段階で進みます. 各段階はあとで補足します.

1. Γ から出発します.
2. Γ の言語へ個体定数 $b_1, b_2, \dots$ を加えます. これらを証人(witness)とよぶことにします.
3. 変数 v_1 をただひとつの自由変数としてもつようなすべての論理式を並べます:

$$A_0(v_1), A_1(v_1), A_2(v_1), \dots$$
4. 上のステップでリストされた各論理式 A に対し, 適当な証人 b をユニークに選び $(\exists v_1 A(v_1)) \rightarrow A(b)$ なる形のひとつの新公理を作り, これらを公理系 Γ に加えます.
5. Lindenbaumの補題 1.3を適用して Γ のfullな拡大 Γ^* を作ります.
6. 拡大された文集合 Γ^* に対し解釈 M を定義します.
7. $M \models A$ となるのが, $\Gamma^* \vdash A$ のときおよびそのときに限ることをチェックします.
8. $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ ですから, Γ のすべての文 A に対し, $M \models A$ となります. したがって, M はわれわれが求めていたモデルです.

以下, 上の各段階を詳細に説明します.

段階2a: 言語へ定数 $b_1, b_2, \dots$ を加え、言語を拡大します。換言すれば、項の定義を、これらの新定数記号を含むように拡大します。これらの新定数は次のように使われます。すなわち、各性質 $A(v_1)$ に対し、そのような性質をもつ対象の名前として使います。定数 b を定めて $A(b)$ であると主張するために加えられます。このことから、 b は、‘性質 A をもつある要素が存在する’ということの明確な証人としての意味をもっています。

段階2b: 可算無限個の新個体定数を導入しているのは、予期される将来に必要な領域の中の対象すべてに名前を与えるためです。どんなに多くの新個体定数を導入しても Γ は拡大言語の理論として無矛盾です。仮に、もし矛盾したとします。 $\perp$ の証明図の出現している新個体定数を一斉に、新しい変数に書き換えると、これはもとの理論における、矛盾を導く証明図となります。したがって、 $\perp$ がもとの理論で導けたことになり仮定に反します。ゆえに、新個体定数を増やしても、無矛盾性は保たれます。

段階3: ちょうど v_1 のみを自由変数にもつ論理式をすべてを一行に並べます:

$$A_1(v_1), A_2(v_1), \dots$$

α_n を

$$\exists v_1 A_n(v_1) \rightarrow A_n(b)$$

なる論理式とします。ただし、 b は今までの A や α の中では用いられていない最初の証人とします。論理式全体は可算無限個なので、証人の数が不足することはありません。

段階4a: そこでわれわれは、すべての α_n を公理としてつけ加えたい。だから 次のように定義します:

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \Gamma, \\ \Gamma^{n+1} &= \Gamma^n \cup \{\alpha_n\}, \\ \Gamma^\infty &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^n. \end{aligned}$$

かくて、 Γ^∞ は Γ へ新公理のすべてを付け加えて得られた体系です。各 Γ^n が無矛盾であることはチェックすることは容易です。本質的な点は、 b が新しい証人であるからそれが自由変数のようにふるまうことです。では実際に、各 Γ^{n-1} が無矛盾ならば Γ^n も無矛盾であることを証明しましょう。 α_n を Γ^{n-1} に追加すると矛盾すると仮定しましょう。 Γ^{n-1} は無矛盾ですから、 $\perp$ の証明には、 α_n を仮定として使わなければなりません。ゆえに、NKの $\neg$ 導入規則により、 $\neg\alpha_n$ が Γ^{n-1} から導かれます。しかるに、

$$\neg\alpha_n \equiv (\exists v_1 A_n(v_1)) \wedge \neg A_n(b_n)$$

より、 $\exists v_1 A_n(v_1)$ と $\neg A_n(b_n)$ がともに Γ^{n-1} から証明できます。ところで、 b_n は証人の定義により、この証明図では、自由変数としてふるまっています。(つまり新自由変数を選んで、それと置き換えた図形もNKの Γ^{n-1} の証明図になります。よって $\forall$ -導入規則により、 $\forall x \neg A_n(x)$ が Γ^{n-1} から導けることになります。(NKでは) $\forall v_1 \neg A_n(v_1) \equiv \neg \exists v_1 A_n(v_1)$ ですから結局 $\perp$ が Γ^{n-1} から導けたことになります。これは Γ^{n-1} が無矛盾であるという仮定に反します。ゆえに、 Γ^n は無矛盾でなければなりません。

段階4b: 各 Γ^n が無矛盾ですからその和である Γ^∞ も無矛盾です。なぜなら、 Γ^∞ から矛盾が導かれるということの形式的な証明は、ある n に対する Γ^n からの矛盾の形式的証明となるからです。(すべての証明図というものは大きさが有限であり、したがって有限個の論理式を含むに過ぎません。その中で(公理として)使われた Γ^∞ の各論理式は(十分大きくえらんだ)ある n に対しすべて Γ^n に含まれてしまいます。)

段階5: Lindenbaumの定理 1.3を適用して、 Γ^∞ を無矛盾かつfullな拡大体系 Γ^* へ拡張することができます。

段階5b: そのとき、もともとの言語の任意の文 A, B に対し、次の事柄が成り立ちます。

1. $\Gamma^* \vdash A$ または $\Gamma^* \vdash \neg A$ である。(これは、 Γ^* がfullだからです。)
2. $\Gamma^* \vdash \neg A$ であるのは、 $\Gamma^* \not\vdash A$ のときかつそのときに限ります。(これは Γ^* が無矛盾であることと(1)からただちに従います。)
3. $\Gamma^* \vdash A \wedge B$ であるのは、 $\Gamma^* \vdash A$ かつ $\Gamma^* \vdash B$ であるときまたそのときに限る。

4. $\Gamma^* \vdash \exists v_1 A(v_1)$ であるのは、ある b に対し $\Gamma^* \vdash A(b)$ となるときかつそのときに限ります。(なぜなら、 $\exists v_1 A(v_1) \rightarrow A(b)$ が新公理 α_n のひとつであるからである.)

段階6: そこで Γ^* に対するモデル $M = (U, R)$ を次のように定義します。個体領域は可算集合 $U = \{b_1, b_2, \dots\}$, n 次の関係記号 R に対して、 U 上の関係としての R を

$$R(a_1, \dots, a_n) \iff \Gamma^* \vdash R(a_1, \dots, a_n)$$

によって定義します。

段階7: 上の(1),(2),(3),(4)は解釈が真であることの帰納的定義に対応しています。ですから、次の結論に達します: 任意の文 A について

$$M \models A \iff \Gamma^* \vdash A.$$

段階8: Γ は Γ^* に含まれるので、 Γ のすべての文 A に対し $M \models A$ です。よって、 Γ が無矛盾であれば Γ はモデルをもつという結論に到達しました。 $\square$

注意 1.1 b_j 全体は可算集合 U をなしていることから、この証明は、 Γ が可算モデルをもつことも同時に示しています。

1.4 ゲーデルの完全性定理

定理 1.5 トートロジーは証明可能である。

証明 背理法で証明します。すなわち、 A をトートロジーとし、しかも A が証明できない ($\nvdash A$) と仮定します。 $A \equiv \neg(\neg A)$ ですから、定理 1.1 を適用すると、シングルトン $\{\neg A\}$ は無矛盾です。このシングルトンに Henkin の定理 1.4 を適用すると、 $\{\neg A\}$ のモデル M が存在します。すなわち、 $M \models \neg A$ です。ゆえに、モデルの定義により、 $M \not\models A$ です。しかし、これは A がトートロジーであることに反します。よって、背理法により、 A は証明可能でなければなりません。 $\square$

注意 1.2 関数記号がある場合は、次のようにして関数記号がない場合に帰着させます。たとえば、一変数の関数 f については、2変数の関係記号 F を導入します。

そして、 $R(f(A))$ なる論理式は、 $F(A, v) \wedge R(v)$ と書き換えます。代わりに F が関数であることを主張する論理式 $(\forall x \exists y F(x, y)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge F(x, z) \rightarrow y = z))$ を公理に付け加えます。このような言語の書き換えを行うと、結局すべての関数記号をなくすことができます。もとの言語が等号 $=$ を含まなければ、等号に関する公理(反射・対称・推移・代入)も付け加える必要があります。一般には、この時点では等号はこの個体領域の同値関係にしかすぎません。個体領域の恒等関係として解釈するためには、個体領域をこの同値関係で

割った商集合が正しい個体領域です。もちろん、このように言語を変換しても、もとの論理式の集合とは論理的に等価です。このあたりはきちんと取り扱う必要がありますが、完全性の証明のアイデアとは直接関係がないので、詳細は省きました。

References

- [1] J. N. クロスリー他著=田中尚夫訳. 現代数理論理学入門. 共立全書. 共立出版, 1977.
- [2] 松本 和夫. 数理論理学. 共立講座 現代の数学. 共立出版, 1971.