# 関数 (function)

「母親」という普通名詞はとくに関数名詞あるい機能名詞とよばれます．一方，「友人」は関係名詞とよばれます．それは「太郎の母親」と「太郎の友人」のふたつの表現の働きの性質の違いから来ます．

前者は曖昧性なく指示する対象が必ず決まります．一方，後者はそうではありません．太郎の友人が複数いる場合はそのうち誰を指示するのか曖昧です．友人が存在しない場合さえあります．つまり,「 の母親」の に対して人を代入すれば「その人の母親」が常に唯一指示されます．この「 の母親」ような指示の働きを**関数**といいます．一方,「 の友人」のように指示に曖昧性がある（場合をも許容する）名詞の働きを「関係」といいます．

さて,「年齢」も関数名詞です．それは時点を決めれば年齢は一意に決まるからです．日常言語において，関数名詞や関係名詞の働きは重要です．その理由のひとつは「母親の年齢」のように関数名詞と関数詞をつなげて**結合**できることでしょう．数学においても関数と関係は欠かせない基本的なことばです．そこでこのノートでは，数学で使われている，とくに「関数」という概念について，集合を使って正確に定義しましょう．

## ブラックボックスモデル

まず，関数のもともとの意味を歴史にたづねてみましょう．関数の語源は function の中国語訳といわれています．つまり関数とは**機能**であるという捉え方です．これを関数のブラックボックスモデルとよびましょう．

$$\text{(入力)}\ \ x \longrightarrow \boxed{\quad f() \quad} \longrightarrow y = f(x)\ \ \text{(出力)}$$

‘ブラックボックス’$f$ に入力 $x$ を与えるとそれに応じて何らか出力 $y$ が得られる．そのとき，出力 $y$ は入力 $x$ に対して決まっていることが重要な条件です．同じ入力に対して時と場合によって異なるものを出力するようなブラックボックスは関数とはいいません．

ブラックボックスモデルでは，入力と出力の関係しか興味がありません．箱の中でどんな風に計算されているかは，無視します．

たとえば，算術式 $2x+1$ を考えましょう．これは，入力 $x$ を 2 倍して，それに 1 を加えた値を出力するという計算規則を表しています．

$$\text{(入力)}\ \ x \longrightarrow \boxed{\quad 2(\cdot)+1 \quad} \longrightarrow 2x+1\ \ \text{(出力)}$$

一方，入力と結果の値だけに注目すると，式 $2x+1$ は，次の対応表を実現していると考えます．

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 入力 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
| 出力 $2x+1$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | $\cdots$ |

次に，別の算術式 $x+x+1$ を見ましょう．これは，「入力 $x$ にそれ自身を加えて，さらに 1 を加える」という計算規則を表しています．したがって，$2x+1$ とは異なる計算規則です．

しかしながら，$2x+1=x+x+1$ ですから，両者の入出力関係，すなわち対応表は全く同じです．

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 入力 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
| 出力 $x+x+1$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | $\cdots$ |

つまり，式 $2x+1$ と $x+x+1$ は**計算規則としては異なる**が，**同じ対応表**，すなわち**同一の機能**を実現しています．

結局，式「$2x+1$」と「$x+x+1$」は次の同一の対応表 (順序対の集合)

$$f=\{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9),(5,11),(6,13),(7,15),(8,17),(9,19),\cdots\}$$

を実現しています．

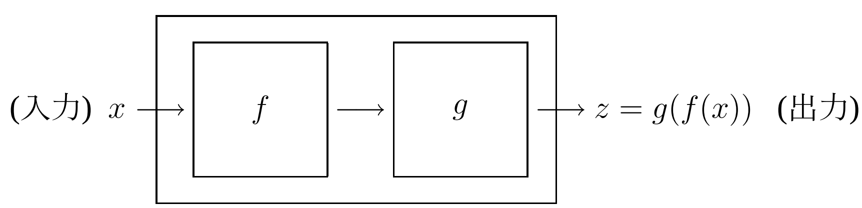
## 関数の結合と結合律

まず，ブラックボックス $f$ に $x$ を入力し，その出力 $f(x)$ をブラックボックス $g$ に入力して，その出力 $g(f(x))$ を最終出力とする．このように二つのブラックボックスを結合したものは，やはりうひとつのブラックボックスです．このブラックボックスのことを $f$ と $g$ の**関数結合**といい，

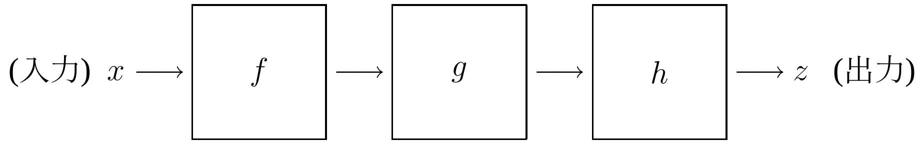
$$gf$$

と書きます．(順序に注意!) $x$ を入力したときの $fg$ の出力は $g(f(x))$ であることは定義より明らかです:

$$(gf)(x)=g(f(x)).$$




さらに第 3 番目のブラックボックス $h$ を，$g$ の右側に加えましょう．




このとき，微妙な点ですが，みっつのブラックボックス $f, g, h$ を左から右へ並べて結合するとして，ふたとおりのブラックボックス合成ができます． $h(gf)$ と $(hg)f$ のふたつです．

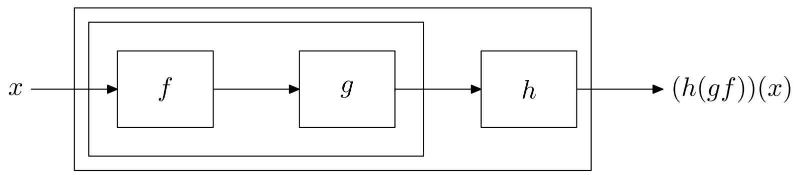



図 1: 関数 $h(gf)$

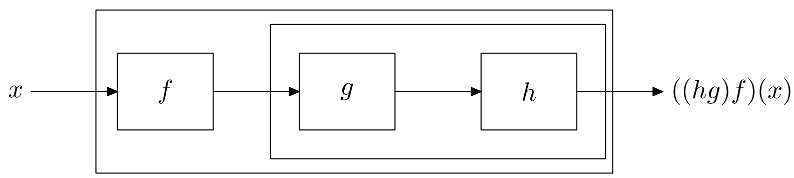



図 2: 関数 $(hg)f$

この二つは作り方が違います． $h(gf)$ はまず $f$ と $g$ を結合して，それに $h$ を結合したブラックボックスです．一方 $(hg)f$ は，まず $g$ と $h$ を結合してから，$f$ とそれを結合します．結合の順序は違います．しかしできあがったふたつのブラックボックスは関数としては同じです．なぜならば，

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり，一方

$$((hg)f)(x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

ですから，このふたつの等式から $(h(gf))(x) = ((hg)f)(x)$ でなくてはなりません．この等式は，同じ入力に対して，二つのブラックボックス $h(gf)$ と $(hg)f$ の出力が等しいことを示しています．ゆえに，関数として $h(gf) = (hg)f$ です．つまり，関数の結合は，その順序によらないことを示しています．関数結合のこの性質を**結合律 (associative law)** といいます．

## 直積の部分集合としての関数

上の例を念頭において，集合を用いて関数概念を定義します．その前に，もうひとつの例をあげます．

人とその母親の順序対の全体集合を考えます．すなわち，「$y$ は $x$ の母親である」である順序対 $(x, y)$ の全体集合を $R$ と表します．

$$R = \{z \mid z = (x, y) \text{ かつ } y \text{ は } x \text{ の母親である}\}.$$

たとえば，「藤圭子は宇多田ヒカルの母親である」から，

$$(\text{宇多田ヒカル}, \text{藤圭子}) \in R$$

です．ところで「母子関係」は次の性質を満たしています．

1. すべての人には母親がいる．
2. 母親を二人以上持つ人はいない．

この二つの条件は，$R$ が関数であることを示しています．その機能は，人を入力すると，その人の母親を出力するブラックボックスです．

$$\text{宇多田ヒカル} \longrightarrow \boxed{\quad R \quad} \longrightarrow \text{藤圭子}$$

母子関係の上の性質 1 と 2 は，人間の全体を $H$ として，それぞれ次の (全域性) と (唯一性) の条件として書けます．

**(全域性)** 任意の $x \in H$ に対して，$(x, y) \in R$ となるようなある $y \in H$ が存在する．

**(唯一性)** 任意の $x \in H$，$y \in H$，$z \in H$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(x, z) \in R$ ならば $y = z$ である．

以上の観察のもと，関数は次のように定義されます．

**定義 1 (関数)** つぎの条件を満たす 3-組 $f = (A, R, B)$ を集合 $A$ から集合 $B$ への関数と呼ぶ．

**直積の部分集合** $R \subseteq A \times B$

**全域性** 任意の $x \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ となるようなある $y \in B$ が存在する．

**唯一性** 任意の $x \in A$，$y \in B$，$z \in B$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(x, z) \in R$ ならば $y = z$ である．

集合 $A$ から $B$ への関数 $f$ のことを，

$$f\colon A \longrightarrow B$$

と書きます．

関数の定義より，各 $x \in A$ に対して $(x, y) \in R$ を満たす $y \in B$ がユニークに決まります．このy を

$$y = f(x)$$

と書きます．

**例 2** $H$ を人間の全体，上で述べた順序対 (子, 母) の全体集合 $R$ とする．そのとき，3-組 $f = (H, R, H)$ は $H$ から $H$ への関数であり，たとえば,

$$\text{藤圭子} = f(\text{宇多田ヒカル})$$

と書けます．

**問題 1**

1. $f = (\{1,2\}, \{(1,2),(2,1)\}, \{1,2\})$ は関数か? 関数ならば $f(1)$ と $f(2)$ の値をそれぞれ何か?
2. $(\{1,2\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{1,2\})$ は関数か?
3. $(\{1,2\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{1,2\})$ は関数か?
4. $(\{1,2\}, \{(1,1)\}, \{1,2\})$ は関数か?

**定義 3 (関数の結合)** 関数 $f, g$ が与えられたとする．$f = (A, R, B)\colon A \longrightarrow B$, $g = (B, S, C)\colon B \longrightarrow C$. このとき，順序対 $(x, g(f(x)))$ $(x \in A)$ の全体を $T$ おく．すると, $(A, T, C)$ は，$A$ から $C$ への関数であることが，すぐ確かめられる．この関数を $gf$ と書く．(順序に注意!) $gf\colon A \longrightarrow C$.

**問題 2** $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を自然数の全体とする．$f$ を式 $2n + 1$ で定義される関数 $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ とする．つまり，$f(n) = 2n + 1$ とする．この $f$ とそれ自身の関数結合 $ff$ を定義する式をひとつ求めよ．

(解 $4x + 3$. なぜなら，$ff(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$.)