モデル論ベーシック
(2006 年度版)

向井国昭

1　はじめに

一階述語論理式, 数学的構造, 真偽の解釈規則のみっつを説明する．前半は「小さな世界」を例にとって説明し, 後半は形式的にモデルの定義を説明する. 例が必要がなければ, 前半はスキップしてかまわない.

2　論理式と真偽

「みんな携帯電話を持っている」とか「花子を好きでない男もいる」いう情報を, 命題論理式ではこれ以上基本的な命題には分解できない.「すべての〜が〜だ」とか「ある〜は〜だ」のようなパターンの情報を表現するためには命題論理を拡張して一階述語論理を導入する必要がある．そして一階述語論理は (集合論と併せれば) 少なくとも現代の数学的な情報の記述には十分であることが知られている.

さて，その**一階述語論理式**を詳しくみていこう．正確な定義は後ほど行うとして，ここでは具体的な例を用いて説明しよう．そのため小さな世界 W で考えてみよう．今回はこの W でのみ考える．使われる普通名詞や動詞は日常言語としての常識的な意味で解釈する.

2.1　小さな世界 W

W は太郎, 次郎, 花子, 恵子の 4 人だけから成る小さな世界である．簡単のために省略記号を使おう.

図 1　小さな世界 W

太郎	t
次郎	j
花子	h
恵子	k

2.2　基本関係

花子は女である	$F(h)$
恵子は女である	$F(k)$
太郎は男である	$M(t)$
次郎は男である	$M(j)$

太郎の年齢は 40, 以下, 花子 30, 次郎 20, 恵子 10 とする. すると「より若い」という関係 Y の真偽の定義は次のとおりである.

花子は太郎より若い	$Y(h,t)$
次郎は太郎より若い	$Y(j,t)$
次郎は花子より若い	$Y(j,h)$
恵子は太郎より若い	$Y(k,t)$
恵子は花子より若い	$Y(k,h)$
恵子は次郎より若い	$Y(k,j)$

この小さな世界 W では「男である」と「女である」というふたつの性質と,「より若い」という 2 項関係のみが与えられている.

問題 2.1 W において次の各命題について**真**か**偽**かを判定せよ.

1. 恵子は男である.
2. 恵子はどの男よりも若い.
3. 太郎は太郎よりも若い.
4. 太郎は花子よりも若くない.
5. 自分よりも若い人が必ずいる.
6. 太郎より若い男がいる.
7. 次郎より若い男がいる.
8. 花子はどの男よりも若い.
9. 花子は太郎より年下でかつ恵子よりは年上である.

問題 2.2 同様に次の命題の真偽を判断せよ

1. 男がいる.
2. 女がいる.
3. すべて男である.
4. すべて女である.
5. すべて男か女である.
6. 男ならば女でない.
7. 女ならば男でない.
8. どの男よりも若い女がいる.
9. どの男に対しても，より若い女がいる.
10. どの男に対しても，より若い男がいる.
11. どの女に対しても，より若い女がいる.
12. どの女に対しても，より若い男がいる.
13. 誰よりも若い人がいる.
14. 誰も自分よりは若くない.
15. 他の誰よりも若い人がいる.

2.3　限量子

我々の小さな世界 W では各個体について次の命題が成り立っていることは明らかである.

1. 太郎は太郎よりも若くない.
2. 花子は花子よりも若くない.
3. 次郎は次郎よりも若くない.
4. 恵子は恵子よりも若くない.

日常言語では，これら 4 つの命題を「だれも自分自身よりは若くない」とひとつにまとめて表現する．この命題は一階述語論理式で

$$\forall x \neg Y(x,x)$$

と書ける．

一般に，x を変数，$C(x)$ を x を含む条件式のとき，すべての対象 a が条件 $C(a)$ を満たすとき，

$$\forall x C(x)$$

が成り立つという．同じく $C(a)$ が成り立つような対象 a がひとつでも存在することを

$$\exists x C(x)$$

が成り立つという．

問題 2.3 次の各論理式を世界 W で解釈し，その真偽を判定せよ．

1. $\forall x \forall y(\neg Y(x,y) \to Y(y,x))$
2. $\forall x \forall y(Y(x,y) \vee Y(y,x))$
3. $\neg \exists x \exists y(\neg Y(x,y) \wedge \neg Y(y,x))$

さて，この小さな世界 W ではどんな**命題**が成り立っているだろうか? 一階述語論理式の一般の定義はまだしていないが，上の例を参考にして次の簡単な場合に限定して翻訳も問題を解こう．

問題 2.4 問題 **??**の各日本文を論理式に翻訳せよ．

問題 2.5 問題 **??**の各日本文を論理式に翻訳せよ．

2.4　等号の導入

「一番若い」という概念はどう記述すればいいだろうか? 一般に「他の誰よりも〜だ」とか「最も〜だ」という表現もよく出てくる．恵子が最も若いということは，**他の**どの個体太郎, 花子, 次郎を持ってきても恵子の方が彼/彼女らよりも若いということである．つまり**異なる**という概念があればよい．異なるというのは**等しい**の否定と考えればようするに等号 $=$ があればよい: $a \neq b$ を $\neg(a = b)$ と定義する. すると論理式 $\forall x(x \neq k) \to Y(k, x))$ は,「k でないどの x に対しても $Y(k, x)$, すなわち, k は x より若い」と読めるので,「最も若い」ことを意味している. このように相等しいという関係はきわめて基本的であるので，等号「$=$」はこの「相等しい」という関係を意味するように予約されている.

なお, 世界 W では, 最も若い人は一人しか存在しないことも計算で確認できる. 一方, もし 4 人全員の年齢が一致している世界を考えると, その世界では一番若い人は存在しないことも計算で分る.

問題 2.6 次の各命題を論理式で書け.

1. 最も若い人は女である.
2. 二人を比べた場合一方が他方より若いかその反対のどちらかが成り立つ.

2.5　用語のまとめ

小さな世界 W を使って一階述語論理の用語の意味を確認しておこう．ただし，正確な定義は後ほど行い，ここでは暫定な説明である.

変数　$x, y, \ldots$

定数　t, h, j, k

個体　モデルの領域の要素を個体という．W の個体は太郎，花子，次郎，恵子であり，他に個体はない.

述語記号　F, M, Y **引数**の数を**次数**という. F と M の次数はともに 1, Y の次数は 2 である.

基本論理式　$F(u), M(v), Y(u, v)$ の形の式を論理式，u, v をそれぞれ**引数**とよぶ.

限量子 $\forall$ と $\exists$ を限量子 (quantifier) という．$\forall\, xP(x)$ は，「すべての x について $P(x)$」が成り立つこと，$\exists\, xP(x)$ は「ある x について $P(x)$」が成り立つことを意味する．

モデル 集合 $\{$ 太郎，花子，次郎，恵子 $\}$ と関係 F, M, Y を併せて**モデル**とよぶ．一般にモデルとは個体領域とその上の関係の系のことである．モデルの正確な定義も後ほど行う．

恒真 どんな可能なモデルにおいても真な論理式のことを**恒真**(valid,tautology) という．

このトートロジーの定義は，真理表による命題論理のトートロジーの概念の拡張であることは，すぐに分かる．

問題 2.7 $\forall y\, Y(a, y)$ は a が一番若いということを表しているだろうか? そうでないならばどこがまずいのか?

問題 2.8 2 項関係述語 Y と等号を使って「最も若い」という概念を論理式で書け．

問題 2.9 各問について，日本語は論理式へ，そして論理式は日本語へ翻訳せよ．以下記号はつぎのとおり．

t	太郎
j	次郎
$K(x, y)$	x は y を知っている．
$S(x)$	x は学生である．
$T(x)$	x は先生である．
$F(x)$	x は女である．

1. 太郎はすべての学生を知っている．
2. 太郎は，次郎が知っている先生をだれも知らない．
3. $\exists x\, T(x) \wedge F(x)$
4. $\forall x\, (S(x) \wedge (\forall y\, T(y) \to K(x, y))) \to K(t, x)$

問題 2.10 英文「Everybody loves somebody.」について

1. 一階述語論理式に翻訳せよ．
2. その論理式を充たすモデルをひとつ示せ．

3. その論理式を充足しないモデルをひとつ示せ.

問題 2.11 真と恒真の概念の違いを述べよ.

問題 2.12 トートロジー (恒真命題) を 3 つ挙げよ

解答

問題 **??**, 問題 **??**，問題 **??**, 問題 **??**の解答を示す．解答以外の正解もある．

問題 ??

1. $\forall x \forall y(\neg Y(x,y) \to Y(y,x))$
   任意の x と y について，x が y より若くなければ y は x よりも若い．
2. $\forall x \forall y(Y(x,y) \vee Y(y,x))$
   任意の x と y について，x が y より若いか y が x より若いかすくなくとも一つが成り立つ．
3. $\exists x \exists y(\neg Y(x,y) \wedge \neg Y(y,x))$
   x が y より若くなく，かつ y が x より若くもない，そのような x と y が存在する．

問題 ??

恵子は男である．	$M(k)$
恵子はどの男よりも若い．	$\forall x\, Y(k,x)$
太郎は太郎よりも若い．	$Y(t,t)$
太郎は花子よりも若くない．	$\neg Y(t,h)$
自分よりも若い人が必ずいる．	$\forall x \exists y\, Y(y,x)$
太郎より若い男がいる．	$\exists x(M(x) \wedge Y(x,t))$
次郎より若い男がいる．	$\exists x(M(x) \wedge Y(x,j))$
花子はどの男よりも若い．	$\forall x\,(M(x) \to Y(h,x))$
花子は太郎より年下でかつ恵子よりは年上である．	$Y(h,t) \wedge Y(k,h)$

問題 ??

男がいる.	$\exists x\, M(x)$
女がいる.	$\exists x\, F(x)$
すべて男である.	$\forall x M(x)$
すべて女である.	$\forall x F(x)$
すべて男か女である.	$\forall x\, (M(x) \vee F(x))$
男ならば女でない.	$\forall x\, (M(x) \to \neg F(x))$
女ならば男でない.	$\forall x\, (F(x) \to \neg M(x))$
どの男よりも若い女がいる.	$\exists x\, (F(x) \wedge (\forall y\, M(y) \to Y(x,y)))$
どの男に対しても，より若い女がいる.	$\forall x \exists y (M(x) \to (F(y) \wedge Y(y,x))$
どの男に対しても，より若い男がいる.	$\forall x \exists y (M(x) \to (M(y) \wedge Y(y,x)))$
どの女に対しても，より若い女がいる.	$\forall x \exists y\, (F(x) \to (F(y) \wedge Y(y,x))$
どの女に対しても，より若い男がいる.	$\forall x \exists y\, (F(x) \to (M(y) \wedge Y(y,x))$
誰よりも若い人がいる.	$\exists x \forall y Y(x,y)$
誰も自分よりは若くない.	$\forall x\, \neg Y(x,x)$
他の誰よりも若い人がいる.	$\exists x (\forall y\, (\neg x = y \to Y(x,y)))$
	($\exists x \forall y\, (x = y \vee Y(x,y))$ でも正解．)

問題 ??

1. 最も若い人は女である
   $\forall x((\forall y((\neg x = y) \to Y(x,y))) \to F(x))$
2. 二人を比べた場合一方が他方より若いかその反対のどちらかが成り立つ．(排他的 OR とは限らない)
   $\forall x \forall y(Y(x,y) \vee Y(y,x))$

3　一階述語論理式

Ω を **関数記号**の集合とする. 各関数記号 $f \in \Omega$ には自然数 $n \geq 0$ がユニークに与えられている. n を f の **次数**とよび, $n = \nu(f)$ と書く. 次数が 0 の関数記号を特に

個体定数ともよぶ. 変数 $x, y, \cdots$ は十分たくさんあるとする. X を **変数**の集合とする. 以下では X と Ω は固定する. すなわち変数といえば X の元であり, 関数記号といえば Ω の元とする. $X \cap \Omega = \emptyset$(空集合) と仮定する.

定義 3.1 (項 (term)) 次の条件で帰納的に定義される表現を **項**という.

1. 変数 $x \in X$ は項である.
2. 定数記号 $c \in \Omega$ は項である.
3. $f \in \Omega$ が次数 n の関数記号で $t_1, \ldots, t_n$ ($n \geq 1$) が項ならば表現 $f(t_1, \ldots, t_n)$ も項である.
4. 以上のみが項である.

項は, Ω と X を明示する場合, (Ω, X)-項という. 項のこのような定義を **帰納的定義**という. 帰納的定義はとても便利で重要な定義法である.

注意 3.1 読みやすさのため, infix(中置き) などの記法を用いることがある. たとえば, ‘$3+4$’, は項 ‘$+(3,4)$’ の中置き法による表現である. 以後慣習として一般に流布している中置き法は, 断りなく用いる.

問題 3.1 $\Omega = \{1, +, \times\}$ として, $1, +, \times$ のそれぞれの次数を $0, 1, 2$ とする. このとき, Ω-$\emptyset$-項の例を 4 つ示せ.

関数記号の他に, さらに **述語記号**の集まりが与えられているとする.

定義 3.2 (原子論理式 (atomic formula)) p が次数 $n \geq 0$ の述語記号, t_i ($1 \leq i \leq n$) が項のとき, 表現 $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ を **原子論理式**(atomic formula) という. p の次数が 0 のときは p と書く. ($p()$ と書く流儀もある.)

注意 3.2 項の場合と同様に, 原子論理式の場合も, 読みやすさのため, infix(中置き) などの記法を用いることがある. たとえば, ‘$3 = 3$’, ‘$3 \leq 4$’ ははそれぞれ原子論理式 ‘$= (3,3)$’ と, ‘$\leq (3,4)$’ の中置き法による表現です.

定義 3.3 次の条件で帰納的に定義される表現を **論理式**という.

1. 原子論理式は論理式である.
2. A,B がともに論理式で, かつ x が変数ならば, $A \vee B$, $A \wedge B$, $\neg A$, $A \to B$,

$\forall x A$, $\exists x A$ もすべて論理式である.

3. 以上のみが論理式である.

4　フレーム (数学的構造) とモデル

フレームの要件は, **個体領域**, **定数記号**の個体としての解釈, **関数記号**の関数としての解釈, **述語記号**の関係としての解釈の, 以上 4 つである. これらが与えられたとしよう. すると次のように, 論理式の **構造に関する帰納法により** すべての論理式に対して真偽値を割り当てることができる.

準備として, 一般に, 変数に固体を割り当てる関数を **割り当て** *(assignment)* とよぶ.
論理式の解釈 (真偽値) を与える.

論理結合子 ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) の解釈: おなじみの, 次の真理表で定義する. この解釈は固定である.

$\neg$(でない)

A	$\neg A$
真	偽
偽	真

$\wedge$ (かつ)

A	B	$A \wedge B$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

$\vee$ (または)

A	B	$A \vee B$
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

$\rightarrow$ (ならば)

A	B	$A \rightarrow B$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

固体領域を D とする. 限量子 (量化子, quantifier) の解釈 ($\forall$, $\exists$) は次のとおりである. $\forall x A(x)$ は, すべての個体 $a \in D$ ついて $A(a)$ がなりたつこと. $\exists x A(x)$ は, ある個体 $a \in D$ について $A(a)$ がなりたつこと.

記号の解釈 I

- 定数記号 c は個体 $I(c) \in D$.
- 関数記号 f は関数 $I(f)\colon D^n \rightarrow D$.
- 述語記号 p は関係 $I(p) \subseteq D^n$.

定義 4.1 (項の解釈) 記号の解釈 I と割り当て η が与えられたならば項の解釈 $J = J(I, \eta)$ が次のようにしてきまる.

1. $J(x) = \eta(x)$. (x が変数のとき)
2. $J(c) = I(c)$. (c が個体定数のとき).
3. $J(f(t_1, ..., t_n)) = I(f)(J(t_1), ..., J(t_n))$.

定義 4.2 (フレーム) 個体の集合 D と, 記号の解釈 I の順序対 $M = (I, D)$ を, (一階述語論理の) **フレーム**とよぶ.

定義 4.3 (充足関係 $\models$) フレーム $M = (I, D)$, 割り当て η, 論理式 A の間の 3 項関係 '$\models$' で次の条件を満たす最小のものを充足関係と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
M, \eta \models p(t_1, \ldots, t_n) &\Longleftarrow (J(t_1), \ldots, J(t_n)) \in I(p) \\
M, \eta \models A \wedge B &\Longleftarrow (M, \eta \models A) \text{ かつ } (M, \eta \models B). \\
M, \eta \models A \vee B &\Longleftarrow (M, \eta \models A) \text{ または } (M, \eta \models B). \\
M, \eta \models A \to B &\Longleftarrow (M, \eta \models A) \text{ ならば } (M, \eta \models B). \\
M, \eta \models \neg A &\Longleftarrow (M, \eta \models A) \text{ でない}. \\
M, \eta \models \forall x A(x) &\Longleftarrow \text{すべての } a \in D \text{ について}, M, \eta' \models A(x). \\
M, \eta \models \exists x A(x) &\Longleftarrow \text{ある } a \in D \text{ について}, M, \eta' \models A(x).
\end{aligned}
$$

ここで, $\Longleftarrow$ は右辺の条件が成り立っているとき, 左辺が成り立つことを意味する. また,η' は, 変数 x について $\eta'(x) = a$ で他の変数 y については, $\eta'(y) = \eta(y)$ であるような割り当てとする.

定義 4.4 (論理的帰結) 任意のフレームに対して, Γ のすべての論理式が真ならば論理式 A が真であるとき, A は Γ の **論理的帰結**であると言い $\Gamma \models A$ と書く.

定義 4.5 任意のフレームと任意の割り当てによって充足される論理式 A を **恒真 (トートロジー)** という. **妥当 (valid)** ともいう. A が恒真であることを $\models A$ と書くこともある.

例 4.1 古典命題論理のトートロジーは, 一階述語論理としてもトートロジーである.

例 4.2 $(\forall x P(x) \wedge Q(x)) \to (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$ はトートロジーである.

例 4.3 (論理式の解釈) 領域 $D = \{$ 太郎, 次郎, 花子 $\}$, 解釈 I は,

$$I(\text{love}) = \{(\text{太郎}, \text{花子}), (\text{次郎}, \text{花子}), (\text{花子}, \text{太郎})\}$$

とする. フレーム $M = (D, I)$ は論理式

$$\forall x \exists y \text{love}(x, y) \quad \text{(Everybody loves somebody.)}$$

を充足することを示せ:

$$M, \eta \models \forall x \exists y \text{love}(x, y)$$

ここで η は任意の割り当てとする.

$M, \eta \models A$ のとき, M は A の**モデルである**という. A が閉論理式 (自由変数と持たない論理式のこと) の場合, M が A の割り当てに依存しない. このことは明らかである.