

集合論ベーシック

(2009 年度版)

向井 国昭

1 はじめに

集合論とはなにか? 自然数の全体 $\mathbb{N}$ を調べる理論を自然数論というのと同じように、**集合論**とはすべての**集合**のなす宇宙 $\mathbb{V}$ の構造を調べる理論である。この宇宙 $\mathbb{V}$ は代数や微積分などあらゆる数学の展開に十分なほど広大であることが知られている。本ノートは現代数学の標準言語でもある**公理的集合論ZFC**を紹介する。ZFC 公理系は第 2 節で説明するが、ZFC をはじめて読む人のために役立つことを願って、ZFC 公理系のところを本節にまとめてみた。お役にたてばさいわいである。

高校数学でもおなじみの**関係・関数**の概念は、数学全般においても基本的かつ必要不可欠である。数学だけではない。たとえば、数理論理学のモデル論は、述語記号は関係を表し、関数記号は関数を表すとして構成されるので、関係・関数の概念は必要不可欠である。本ノートの目標は $\mathbb{V}$ の構造の基本を述べることであるが、関係・関数概念をきちんと定義するために必要な範囲の構造に限定される。したがって $\mathbb{V}$ 自身の構造の深い性質についてはふれない。

ZFC 集合論は簡潔でわかりやすく、美しく、柔軟性があり、そして強力である。数学の事実上の標準言語とみなされている。ZFC 公理系は数学的操作として何が許されているのかを規定するものである。いわば数学の国の憲法である。国民はその国の憲法を読むべきであるように、集合を扱う者は ZFC 公理系を一度は読むべきであろう。

集合論における基本関係は集合の間の 2 項関係 $\in$ のみである。集合論の基本関係式 $x \in y$ を、**集合 x は集合 y の要素 (元) である**と読む。ZFC(集合論) の公理系とは $\mathbb{V}$

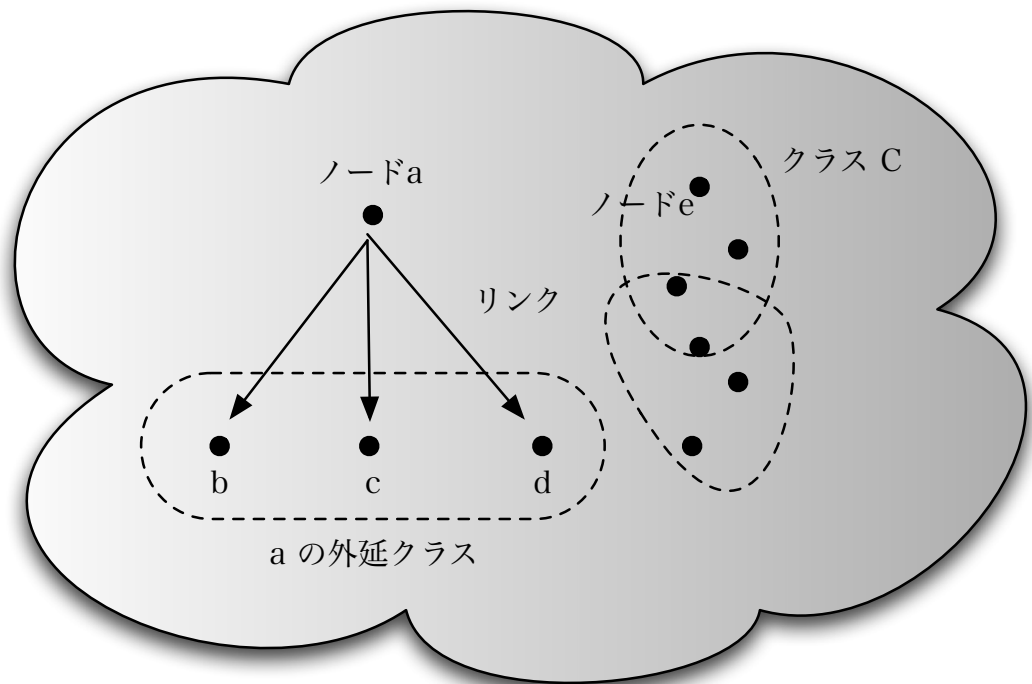


図1 集合の宇宙 $\mathbb{V}$: ノードが集合を表し、矢印がメンバシップ関係を表している。破線で囲んであるのはクラスである。ノード a の外延クラスはきっかりノード b, c, d からなる。ノード e はクラス C の要素である。「 $b \in a$ 」はノード a, b の間に親子のリンクがあることを、「 $e \in C$ 」はノード e がクラス (破線) C の中にあることを表す。

が満たすべき制約の系である。個々の公理は、どんな集合が $\mathbb{V}$ に存在するかを規定する。公理は「これこれの集合が存在するならばしかじかの集合が存在する」という条件文の形で述べられる。

$\mathbb{V}$ はひとつの有向グラフである。これは公理的集合論の理解のためのコツであろう。「広大な」とか「無限」という形容詞に惑わされていけない。たんなる有向グラフのようなものと割り切って ZFC の公理系をよんだほうがよい。実際、無限についての公理は、無限公理ただひとつ、つまり、自然数全体に相当する無限の存在を仮定するところだけである。 $\mathbb{V}$ はひとつの有向グラフであり、ZFC はこの有向グラフ $\mathbb{V}$

の形を規定しているにすぎない。

集合の解説書の中には、集合とは「一にして多なるもの」という禅問答的な説明が見られるが、このような説明は初心者には不要な混乱をもたらすだけのように見える。それよりは集合とは有向グラフ $\mathbb{V}$ のひとつのノードのことであり、集合の要素とはそのノードの子ノードのことであると素直に理解すべきである。集合を有向グラフ以上のものとして神秘的に解説する必要はない。

集合の世界 $\mathbb{V}$ はひとつの有向グラフであるとした。有向グラフ $\mathbb{V}$ のひとつひとつのノードは「集合」と呼称される。それ以外のものを集合とは決してよばない。結局、集合とは有向グラフ $\mathbb{V}$ のノードのことであり、それ以外のなにものでもない。

さて、ユークリッド幾何学を典型として一般にどんな理論も、構成上は未定義用語から出発する。集合論も同じである。実際 ZFC 集合論も形式的には、一階述語理論の言葉で書かれたごくふつうの形の公理系をもったごくふつうの数学の一分野に過ぎない。集合論は数学のメタ理論なのであるからなにか特別な記述の枠組があるはずというのは期待しすぎである。このことも注意しておきたい。

ZFC 集合論の要点を理解のコツとしてまとめておこう。まず、 $\mathbb{V}$ は**有向グラフ**である。有向グラフとは、**ノードとリンク (矢)** からなるおなじみの構造である。つまり $\mathbb{V}$ のふたつのノードの間には向きのついたリンク (=矢) が**高々一本**あるということで、それ以外のものはなににもない、シンプルきわまりない構造である。なお有向グラフであるから、 $x \rightarrow y$ と、 $y \rightarrow x$ と逆向きのリンクがひとつずつ存在する可能性も排除しない。

ノードはひとつの集合を表しているとした。では $\mathbb{V}$ の二つのノードの間のこのリンクはなにを表すのか？それはメンバシップである。すなわち、 $\mathbb{V}$ のふたつのノード x と y の間の、 y から x への向きのついたリンクは、集合 x が集合 y の要素であるという情報、つまり、「 $x \in y$ 」を表している。逆に、 y から x へのリンクがないことは $x \notin y$ 、すなわち、 x は y の要素ではないことを表している。繰り返すと、 $x \in y$ のときおよびそのときに限り y から x へのリンク、すなわち $y \rightarrow x$ 、がある。集合論の公理系 ZFC は、このネットワーク構造 $\mathbb{V}$ が満たすべき制約を述べている。

ここまで書けば、ZFC 集合論をこれからはじめて読むという読者でも、ZFC 集合論は明快に分かるだろう。つまり、対象はしよせん有向グラフであり、公理系とはこの有向グラフにどんなノードがあるのか、あるいはどんなリンクがあるのかということを、一階述語論理という単純明快な言語で述べたものなのであるから、ZFC 集

合論がさっぱりわからないという人には、やはり「難しく考え過ぎてませんか? たかが有向グラフですよ、もっとシンプルに見てください」とアドバイスしたい。

単純とはいえこの宇宙 $\mathbb{V}$ は、本文でも紹介するように、空集合 $\emptyset$ 、自然数全体 $\mathbb{N}$ 、 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数全体、等々を含み、その中で代数、幾何、微分積分、確率統計などどんな数学でも展開できるほど、十分広い舞台であることが実証されている。20 世紀以降、数学の‘標準言語’となっている。

さて、 $\mathbb{V}$ のノードからなるあつまりを**クラス**とよぼう。たとえば $\mathbb{V}$ 自身もノードのあつまりであるからクラスである。ここで「あつまり」ということばを定義せずに使っているが、使わなくても ZFC を一階述語論理で記述できる。しかし説明の便宜と簡単のため、あつまりということばを素朴な意味で使う。このような説明に満足できない読者は集合論の本格的な教科書 [1] の集合論の基礎の章を参照のこと。

標準的集合論 ZFC 公理系の公理の読み方を、「対の公理」を例として説明しよう。 a と b を $\mathbb{V}$ のノードとする。このとき、 $\mathbb{V}$ のノード c でその子ノードが正確に a と b だけであるような、そんな c が存在するだろうか? つまり $\mathbb{V}$ はどんな a と b についてそのような親 c が存在する世界なのだろうか? 対の公理は a と b に対してこの c が存在することを主張する公理である。

この「対公理」のように、集合論の公理は、「 $\mathbb{V}$ にこれこれのノードが存在するとき $\mathbb{V}$ にしかじかのノードが存在する」という主張の形をとる。 $\mathbb{V}$ に関するこのようないくつかの制約の集まりが ZFC 公理系である。そのとき、 $\mathbb{V}$ を研究しているのだから、「 $\mathbb{V}$ に存在する」の「 $\mathbb{V}$ に」はいわなくても明らかなので省略される。

さて、次に集合とクラスということばの意味の混乱をさけるための注意をのべよう。 $\mathbb{V}$ のノード a の子ノードは、当然ながら、 $\mathbb{V}$ のノードである。つまり、クラスということば使いの約束により、ノード a の子ノードの全体はクラスである。つまり、この意味で集合 ($=\mathbb{V}$ のノード) はクラスである。しかし、その逆は一般に成り立つのだろうか? たとえば、クラス $\mathbb{V}$ 自身は集合であろうか? その意味は、つまり、 $\mathbb{V}$ のノードすべてを子ノードとするようなそんな特別なノード x が $\mathbb{V}$ に存在するだろうか? ここは、時間をとってじっくり考えていただきたい。 $\mathbb{V}$ はあまりにも大きすぎるのでそのような x が存在するのは不自然なのではないか? いわゆる ‘The class $\mathbb{V}$ is too big to be a set’ ではないか? 存在するかどうかは本文にゆずる。しかし、 $\mathbb{V}$ のノードからなるあるクラス C に対しては C を子ノードの全体とするようなノードが存在しない可能性があることは納得できるだろう。

ZFC 集合論の対象は集合であり、ZFC 集合論にとってクラスはメタな対象である。したがって混乱のないように、集合とクラスの存在のレベルの違いに注意を払う必要がある。混乱しそうになった場合はぜひ、 $\mathbb{V}$ は有向グラフであるという原点に立ちかえればよい。

集合論入門といえ、たいていは、黒板などに円を描いて、斜線を使ったりして、部分集合の関係とか、集合の和、積などの演算を導入する。この「ベン図」を用いる方法はわかりやすい。しかし初歩的なところであまりにも成功しているため、公理的集合論をまなぶとき、それが落とし穴になる。集合とクラスの困難もその落とし穴の一例である。そこで、本ノートは、「ベン図」のわかり易さを認めつつも、有向グラフを用いた。それによって「一にして多なるもの」なる説明の難解さや「集合とクラス」の混乱はふせげると考える。

このノートでは、最近の [3, 2] などに従い、「関数とは関数条件をみたす順序対の集合、つまり (従来の意味での関数の) グラフのこと」とする定義を採用した。つまり、関数とは定義域、値域、関数のグラフの 3-組として定義する [4] 等、多くの数学書が採用している '伝統的定義' はとらない。集合族の直積の定義のところで指摘するが、'関数はグラフ' とする方が、「3-組としての関数」よりも自然であることがわかる。他方、集合と関数の圏 (the category of sets and functions) を考えるときは、値域が関数の要件でないことが一見欠陥にみえるが、自明な操作で回避できるので、少なくとも深刻な障害にはなりえない。このような理由で、値域を指定しない定義、「関数とは (関数の) グラフ」を採用した。

2 集合論 (ZFC) の公理

以下、すべての変数や定数は断らないかぎり集合を指す。上述のように、集合とは有向グラフ $\mathbb{V}$ のノードのあつまりであり、集合とは $\mathbb{V}$ のノードのことであった。したがってクラスと集合はまったく別ものであることに注意する。これはたんに用語の約束であり、クラスと集合を混乱する理由はどこにもない。もし以下の説明でクラスと集合の違いがわからなくなったときはぜひこの注意を思い出してほしい。そうすれば、筆者も体験したことだが、混乱は水解するはずである。

説明の便宜上、 $\mathbb{V}$ のノード x について、 x のすべての子ノードの集まり (すなわちクラス) を x の**外延**とよぼう。 x の外延はクラスであり、すぐ上の約束により、クラ

スは集合ではなかったから、 x の外延は集合ではない。以上の注意は明快であろう。メンバシップ記号 $\in$ は $\mathbb{V}$ のノードとクラスの間のメタなメンバシップを表す記号としても使用する。これは便宜上とはいえ、ちょっと乱暴ではあるが、 $a \in b$ と書くときは、 b が $\mathbb{V}$ のノードなのかそれもクラスなのかは明らかなので、混乱はないであろう。つまり、 b が $\mathbb{V}$ のノードの場合、 $a \in b$ はノード a が b の外延としてのクラスに含まれる要素であることを表す。つまり、 b から a へのリンクがあるということ。一方、 b がクラスである場合、「 $a \in b$ 」はたんにノード a がクラス b の要素であることを表す。この約束のもと、たとえば、 a が $\mathbb{V}$ のノードであることは、 $a \in V$ と書ける。

公理 2.1 (空集合)

$$\exists a \forall x \neg (x \in a).$$

空集合公理は、 $\mathbb{V}$ のノードで子ノードをまったくもたないものがすくなくともひとつは存在することを主張している。おなじことであるが、外延がからっぽの $\mathbb{V}$ のノードが存在することを主張している。つまり、そこから外に向かって出ているリンクがひとつもないノードが $\mathbb{V}$ に存在するということである。これを集合論のふつうのいい方にすれば、「ひとつも要素を含まない集合」が存在するという主張である。 $x \in a$ なる集合 x が存在しないような a を**空集合**とよぼう。なお、空集合公理自体は、空集合が存在することを主張しているのであって、ただひとつしか存在しないとまでは主張していないことにも注意してほしい。

公理 2.2 (外延性)

$$a = b \iff (\forall x \in a \ x \in b) \wedge (\forall x \in b \ x \in a).$$

外延性公理は、 $\mathbb{V}$ の相異なるノードは相異なる外延を持つことを主張している。つまり「集合はその外延できまる」という主張である。同じことであるが、二つの集合が等しいための条件は、その外延が一致することである。すなわち、集合はそれが含む要素で決まる。 $\mathbb{V}$ の異なるふたつのノードが同一の外延をもつことはありえないのである。もっとも集合論らしい制約であろう。この外延性公理からいろいろな集合が一意に決まることがいえて便利である。

問題 2.1 空集合は、ただひとつしか存在しない。(外延性の公理を使う。)

この世の中に「からっぽのレジ袋」はたくさん存在する．一方，集合の世界 $\mathbb{V}$ には「からっぽの集合」はただひとつである．

以下，くどくなりすぎるのをさけるため，有向グラフとしての $\mathbb{V}$ を記述しているのだという立場を強調しない．しかし，読者は必要ならいつでもこの有向グラフとしての $\mathbb{V}$ にたちもどって公理が何を主張しているのかを解釈していただきたい．するとどの公理の主張も明快なものであることが分かるだろう．

公理 2.3 (対の公理) a と b の対 u が存在する: $\forall x (x \in u \iff x = a \vee x = b)$.

任意のふたつの集合 a, b に対して，それらだけを含む集合が存在する．この集合を a と b の **対** (*pair*) という．

問題 2.2 対の公理の主張を有向グラフ $\mathbb{V}$ のことばで説明せよ．

問題 2.3 a, b が与えられたとき， a と b の対 u は，ユニークに決まる．(ヒント: 外延性の公理を使う．)

a と b から決まるこの対集合を

$$u = \{a, b\}$$

と表わす．

問題 2.4 $\{a, b\} = \{b, a\}$ を証明せよ．

定義 2.1 $\{a\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, a\}$

公理 2.4 (分離公理) a を集合， $\Phi(x)$ を x を自由変数としてもつ述語論理式とする．次のような集合 w が存在する: $\forall u (u \in w \iff u \in a \wedge \Phi(u))$.

集合 a および性質 Φ が与えられたとき， a の要素でかつ性質 Φ を満たすものをすべて集めると，再び集合をなす．しかも， w は外延性の公理によりユニークに存在する．この w を $w = \{x \in a \mid \Phi(x)\}$ と表わす．性質を表現するものとして一階述語論理式が使われている．この意味で集合論と一階述語論理は密接である．集合論は述語論理を **外延化したもの** といってもよいだろう．

定義 2.2

$$a \subseteq b \iff \forall x (x \in a \rightarrow x \in b).$$

$a \subseteq b$ のとき, a は b の**部分集合**であるという.

問題 2.5 任意の集合 a, b, c について, 次を証明せよ.

反射律 $a \subseteq a$.

推移律 $a \subseteq b$ かつ $b \subseteq c$ ならば, $a \subseteq c$.

反対称律 $a \subseteq b$ かつ $b \subseteq a$ ならば, $a = b$.

公理 2.5 (べき集合) 与えられた集合 a に対して次のような集合 w が存在する:

$$\forall x (x \in w \iff x \subseteq a).$$

この w を a の **べき集合** (power set) とよび, $w = \text{pow}(a)$ と表わす. w は外延性公理によりユニークに存在することがわかる. (確かめよ.) いいかえると, $\text{pow}(a)$ は a の部分集合の全体 (のなす集合) である:

$$\text{pow}(a) = \{x \mid x \subseteq a\}.$$

公理 2.6 (和集合の公理) 与えられた集合 a に対して次のような集合 u が存在する:

$$x \in u \iff \exists y (y \in a \wedge x \in y).$$

集合 a が与えられたとき, a のどれかの要素に含まれる元をすべて集めるとふたたび集合になる. すなわち **集合族の和集合**が存在する. この u は外延性公理によりユニークに存在する. (確かめよ.) この u を

$$u = \bigcup a$$

と表わす. とくに,

$$a \cup b \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{a, b\}$$

と略記する.

例 2.1

$$\bigcup \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\bigcup \emptyset = \emptyset.$$

さて, 対公理により対を作ることができた. これから, **順序対**という極めて重要な集合が構成できる. 対の概念が確立すると, 待望の関数や関係が作れる.

定義 2.3 (順序対)

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

順序対は次の大切な性質を持つ.

命題 2.1

$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \wedge y = v.$$

問題 2.6 この順序対の性質を証明せよ.

上の問などで, すでに自然数を使っているが, あらためて自然数を $0, 1, \dots$ を次のようにコーディングして定義しよう:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \\ 1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{0\} \\ 2 &\stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\} \\ 3 &\stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \\ n &\stackrel{\text{def}}{=} (n-1) \cup \{n-1\} \end{aligned}$$

問題 2.7 上のコーディングのもとで, 次の証明せよ.

1. $1 \neq 2$.
2. $(1, 2) \neq (2, 1)$.
3. $a \neq b$ ならば $(a, b) \neq (b, a)$.

定義 2.4 (直積)

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$A \times B$ を A と B の**直積**とよぶ.

定義 2.5 (関数) 順序対からなるクラス f は, 次の**関数条件**を満たすとき, **関数**とよぶ.

$$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z.$$

クラス $\text{dom}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \exists y (x, y) \in f\}$ を関数 f の**定義域**とよぶ. クラス $\text{image}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in \text{dom}(f)\}$ を関数 f の**像**とよぶ. $(x, y) \in f$ のとき, $f(x) = y$ と表す.

定義 2.6 (A から B への関数) 関数 f が直積 $A \times B$ の部分集合で、 $\text{dom}(f) = A$ のとき、 f を **A から B への関数** とよぶ。このとき、 B を f の **値域** とよぶ。

注意 2.1 f が A から B への関数で、 B が C の部分集合ならば、関数の定義により、 f は A から C への関数でもある。つまり、一般に関数 f は (無数に) 異なる値域を持つ。たとえば、空集合 $\emptyset$ は $\emptyset$ から $\emptyset$ への関数であると同時に、 $\emptyset$ からシングルトン $\{\emptyset\}$ への関数である。

公理 2.7 (置換公理) f を関数とする。定義域 $\text{dom}(f)$ が集合ならば像 $\text{image}(f)$ も集合である。

定義 2.7 (族) 関数 a は、 $\text{dom } f = A$ のとき、**A を添数集合とする族** とよぶ。 $(a_x)_{x \in A}$ と書く。ここで $a_x = a(x)$ 。

注意 2.2 この定義では、族とは関数そのものであるから、体系的にはもはや不要であろう。実際、

$$(a_x)_{x \in A} = \{(x, a_x) \mid x \in A\}.$$

数学ではよく使われた歴史的な用語としては残しておくべきだろう。

例 2.2 $\mathbf{N}$ を自然数の全体集合とする。すると自然数列は $\mathbf{N}$ を添数集合とする族である。たとえば、 $(2n)_{n \in \mathbf{N}}$ は 2, 4, 6, 8, 10, ... なるすべての偶数からなる自然数列を表している。

とくに、各 $x \in A$ について a_x が集合であることを強調して、 $(a_x)_{x \in A}$ を **集合族** ともいう。集合族 a は集合を値としてとる関数という意味で、集合関数とよんでも良い。

定義 2.8 (集合族の直積) $(M_x)_{x \in A}$ を集合族とする。つぎの条件をすべて満たす関数 f の全体を $(M_x)_{x \in A}$ の直積とよび、 $\prod_{x \in A} M_x$ と書く。

1. $\text{dom}(f) = A$.
2. $f(x) \in M_x \quad (x \in A)$

定義域 I を共有する集合関数 a と b で $a(x) \subseteq b(x) \quad (x \in I)$ ならば直積 $\prod_{x \in I} a \subseteq \prod_{x \in I} b$ であることは明らかである。

注意 2.3 関数 f の値域を気にしなくてよいことに注意。関数の要件として値域まで

こめなければならないとすると、 f の値域を ‘むりやり’ 指定しなくてはならない。与えられた集合族の和をとればよいのであろうが、そうすると和が異なる集合族の直積の比較のときは、結局のところ、せっかつ指定した値域を無視して比較しなくてはならなくなる。関数概念に値域を指定しない方が、集合族の直積に関してはすぐれているといえる。

公理 2.8 (選択公理) $A \neq \emptyset$, かつ $x \in A$ ならば $x \neq \emptyset$ であり, さらに, $x, y \in A, x \neq y$ ならば $x \cap y = \emptyset$ とする. そのとき,

$$x \in C \iff \exists y \in A \wedge x \in y.$$

なる集合 C が存在する.

次の条件を選択公理とよぶこともある. 両者は同等である. A が空ではないとして, $(M_x)_{x \in A}$ を集合族とする. このとき, $\forall x \in A M_x \neq \emptyset$ ならば $\prod_{x \in A} M_x \neq \emptyset$ である.

空集合でない集合の族が与えられたとき, その族に含まれる各集合からひとつ要素を選びだすことができ, その要素の族はまた集合 (すなわち V の要素) である. 得られたこの族を **選択関数** という.

公理 2.9 (基礎の公理)

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \cap x = \emptyset).$$

集合の要素は集合であるが, **基礎の公理** は, こうして要素を次々とたどっていくと必ず有限ステップで空集合に至ることを主張している. これは自分自身を要素とするような集合を排除するための公理である. 集合の構成原理でなく, 集合論の基礎付けのための公理である. 基礎の公理を否定した公理を用いる有用な集合論もある.

問題 2.8 次の二つ条件が同値であることを証明せよ.

1. 基礎の公理
2. $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ni \dots$ なる無限列が存在しない.

公理 2.10 (無限公理) 次のような集合 $\mathbf{N} \neq \emptyset$ が存在する: $\forall x (x \in \mathbf{N} \rightarrow \{x\} \in \mathbf{N})$.

無限公理 は, 自然数の全体と同じ大きさの集合, すなわち少なくともひとつの無限集合の存在を主張している.

定義 2.9

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ また } x \in B\} \quad (\text{和})$$

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \quad (\text{交わり})$$

定義 2.10 $(M_x)_{x \in A}$ を集合族とする.

$$\bigcup_{x \in A} M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \exists x \in A \ y \in M_x\} \quad (\text{和})$$

$$\bigcap_{x \in A} M_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \forall x \in A \ y \in M_x\} \quad (\text{交わり})$$

定義 2.11

$$\bigcup M \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \exists A \in M \ x \in A\} \quad (\text{和})$$

$$\bigcap M \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \forall A \in M \ x \in A\} \quad (\text{交わり})$$

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \neg(x \in B)\} \quad (\text{差})$$

$(M_x)_{x \in A}$ を集合族として, 次の等式は両辺の定義により明らかであろう.

$$\begin{aligned} \bigcup_{x \in A} M_x &= \bigcup \{M_x \mid x \in A\} \\ \bigcap_{x \in A} M_x &= \bigcap \{M_x \mid x \in A\} \end{aligned}$$

定義 2.12 (n -組) 定義域が $\{1, 2, \dots, n\}$ の関数 a を $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と書く. ただし, $a_i = a(i)$ ($1 \leq i \leq n$)

命題 2.2 $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_m)$ ならば $n = m$ かつ $a_i = b_i$ ($1 \leq i \leq n$)

注意 2.4 $n = 2$ の場合, つまり 2-組の記号と順序対の記号がコンフリクトしてしまったが, 混乱はないであろう.

定義 2.13 $A_i = A$ ($1 \leq i \leq n$) の場合の n -組の全体を A の n 個の直積とよび, A^n と書く. $A^n = A \times \dots \times A$ (n 個) と同一視してよいことは明らかであろう.

$(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ を a_i に対応させる関数 p_i を i -射影とよぶ. すなわち, A^n から A への n 個の関数がある. X を任意の集合として, X から A への関数 $f_1, \dots, f_n$ に対して

$f_1 = p_1 h, \dots, f_n = p_n h$ となるような X から A^n への関数 h がユニークに存在することも容易に証明できる. 逆に直積をこの性質で規定する方法もある. その場合, 複数の直積が存在するが, それらは区別する必要がないので同一視できる. たとえば n 個の相異なる要素を持つ集合 I から A への関数全体集合もこの拡張された意味で直積であり A^n と全く同様の性質を持つ.

定義 2.14 (単射, 1 対 1 対応) $f: X \rightarrow Y$ が **単射** $\iff$ 任意の $x, y \in X$ について, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$.

定義 2.15 (全射, 上への写像) $f: X \rightarrow Y$ が **全射** $\iff$ 任意の $y \in Y$ についてある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$.

定義 2.16 (恒等写像) $f: X \rightarrow X$ が恒等写像 $\iff \forall x \in X f(x) = x$. $f = \text{id}_X$ と表わす.

定義 2.17 (関数の合成) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ のとき $h: X \rightarrow Z, x \mapsto h(x) = f(g(x))$ なる関数を gf と表す. (fg と書く流儀もあると聞く.)

定理 2.3 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする. $gf: X \rightarrow X, fg: Y \rightarrow Y$ がそれぞれ恒等写像のとき f と g はそれぞれ 1 対 1 かつ上への写像である.

問題 2.9 この定理を証明せよ. (やさしい.)

定義 2.18 (関数の制限) $f: X \rightarrow Y, Z \subseteq X$ とする. g が f の Z への制限 $\iff \text{dom}(g) = Z, \forall x \in Z g(x) = f(x)$. $h = f \upharpoonright Z$ と書く.

2.1 関係, 順序, グラフ

定義 2.19 (関係) 次の条件を満足する順序対 (X, R) を $(X$ 上の 2 項) 関係とよぶ:

1. X は集合.
2. $R \subseteq X \times X$.

$(x, y) \in R$ のとき, およびそのときに限り $R(x, y)$ あるいは xRy と書く. 混乱がないときは, (X, R) をたんに R と書く. また, 2 項関係 (X, R) を有向グラフともいい, X の元をノード, R の元 (x, y) を矢と呼び $x \rightarrow y$ と書く.

定義 2.20 (同値関係) すべての $x, y, z \in X$ について次の条件を充たす関係 $(X, \sim)$ を X 上の同値関係という:

1. (反射律) $x \sim x$.
2. (推移律) $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$.
3. (対称律) $x \sim y, y \sim x \implies x \sim y$.

問題 2.10 $\sim$ を X 上の同値関係とする. 集合 $C_x = \{y \in X | x \sim y\}$ を x の同値類という. そのとき次を証明せよ.

1. $x \sim y \implies C_x = C_y$.
2. $x \sim y$ でなければ $C_x \cap C_y = \emptyset$.

したがって, 集合 X に同値関係が与えられると, X をその同値類に分割できる. 逆に, X が分割されているならば, $x \sim y$ をおなじ分類に属すと定義することにより, X 上の同値関係が得られ, $\sim$ による分割はもとの分割と一致する.

定義 2.21 (順序) すべての $x, y, z \in X$ について次の条件を充たす関係 $(X, \leq)$ を X 上の順序と呼ぶ:

1. (反射律) $x \leq x$.
2. (推移律) $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$.
3. (反対称律) $x \leq y, y \leq x \implies x = y$.

2.2 クラスと集合

ZFC 公理系をひとつおりながめところで, 「はじめに」で述べたことを繰り返し若干つけくわえる. 一般に, モノの集まりをクラスと呼んだ. 集合の全体がなすクラスを $\mathbb{V}$ とおいた. ZFC 集合論の公理系は, クラス $\mathbb{V}$ の性質を述べている. $\forall x, \exists x$ の x は $\mathbb{V}$ の要素を走る. 一般に, クラスが集合を成すとは限らないことは重要な注意である.

逆にクラス概念を出発点にして, どれかのクラスの元になっているクラスを集合と定義することもできる. そのとき集合とクラスの間には次の関係がある:

1. 集合は, クラスである: $x \in \mathbb{V}$ ならば $x \subseteq \mathbb{V}$.

2. どれかのクラスの元であるクラスは集合である: C がクラスで $x \in C$ ならば $x \in \mathbb{V}$.

定義 2.22 集合でないクラスを固有 (proper) クラスと呼ぶ.

例 2.3 ラッセル・クラス $R = \{x \mid \neg(x \in x)\}$ は固有クラスである.

3 演習問題

問題 3.1 X を任意の集合とする. 空集合 $\emptyset$ から X への関数は唯一存在し, それは $\emptyset$ である.

問題 3.2 集合 $\{a, b\}$ から $\{c, d\}$ への関数をすべて求めよ.

問題 3.3 n 個の要素を持つ集合のべき集合は 2^n 個の要素を持つ.

問題 3.4 X, Y をそれぞれ m, n 個の要素を持つ集合とする. X から Y への関数は全部で何個あるか.

問題 3.5 R_1, R_2 が X 上の同値関係ならば, $R_1 \cap R_2$ も X 上の同値関係であることを証明せよ.

問題 3.6 I を集合とし, $(R_i)_{i \in I}$ が X 上の同値関係の族ならば, $\bigcap_{i \in I} R_i$ も X 上の同値関係であることを証明せよ.

問題 3.7 S が X 上の関係ならば $S \subseteq R$ を充たす X 上の最小の同値関係 R が存在することを証明せよ.

4 おわりに

さまざまな数学的理論のための理論という意味で, ZFC 集合論はメタ理論である. しかしながら集合自体を対象としてみるならば本文で強調したように有向グラフ理論の展開と何ら特別な違いはない. メタ理論としての特権や無限にまつわる特別な神秘など, ZFC 集合論の宇宙 $\mathbb{V}$ のどこにも存在しない. ZFC 集合論は数学の一分野

にすぎない. とはいえ, 一階述語論理という言葉と強く結びついている点は, 全数学の中では際立っている. さあ, 有向グラフ $\mathbb{V}$ をもっと調べてみよう!

文献

- [1] K. Kunen. *Set Theory*. North Holland, 1980.
- [2] 齋藤正彦. 数学の基礎—集合・数・位相. 基礎数学 14. 東京大学出版会, 2002.
- [3] 田中一之=鈴木登志雄. 数学のロジックと集合論. 培風館, 2003.
- [4] 弥永昌吉=小平邦彦. 現代数学概説 (i). 岩波書店, 1961.